

准双曲面齿轮准静态接触分析和试验研究*

卓耀彬^{1,2}, 周晓军², 吕浩亮², 滕国阳²

(1. 丽水学院工学院 丽水 323000; 2. 浙江大学流体传动及控制国家重点实验室 杭州 310027)

摘要:建立了精确的准双曲面齿轮的轮齿面和过渡曲面数学模型;选择用平均接触椭圆长半轴、接触线方向角和传动误差曲线交点来评价齿面接触斑点和传动误差;以一个准双曲面齿轮副为计算实例,建立了适合准静态齿面接触分析的准双曲面齿轮传动系统有限元分析模型;通过准静态加载齿面接触特性分析,得到齿根弯曲应力、接触应力和传动误差的变化规律,分析载荷的影响情况,并比较了有限元结果与经验公式计算结果。开发了准双曲面齿轮试验台,进行齿面接触斑点和齿根弯曲应力检测,试验结果与仿真结果的一致性较好。

关键词: 准双曲面齿轮;齿面接触斑点;传动误差;有限元分析;试验验证

中图分类号: TH132 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 460

Theoretical and experimental investigation on contact characteristics of hypoid gears under quasi-static condition

Zhuo Yaobin^{1,2}, Zhou Xiaojun², Lv Haoliang², Teng Guoyang²

(1. College of Engineering, Lishui University, Lishui 323000, China; 2. State Key Laboratory of Fluid Power Transmission and Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: The precise mathematical models of tooth surfaces and fillet surfaces of the hypoid gear are established. Three indexes of average semi-major axis of contact ellipses, the direction angle of contact path and the intersection of the transmission error curve are selected to evaluate the tooth contact pattern and the transmission error. Then, taking a hypoid gear for example, the finite element analysis model of hypoid gears transmission system is established which is suitable for tooth contact characteristics analysis under quasi-static condition. By the analysis of quasi-static motion and loaded tooth contact, the variations of bending stresses, contact stresses, and transmission error are investigated. Besides, the results are compared with the calculated results by empirical formula. Finally, a hypoid gear transmission performance test bed is developed, then the tooth contact pattern test and bending stress test are carried out, and the test results are well consistent with the simulation results.

Keywords: hypoid gear; tooth contact pattern; transmission error; finite element analysis; verification

1 引言

准双曲面齿轮具有传动平稳、重合度高、承载能力大、噪声低和传动比大等优点,因此被广泛应用于汽车、航天、航空、船舶和工程机械等领域^[1]。

国内外学者都采用计算机仿真技术进行准双曲面齿轮的齿面接触分析(tooth contact analysis, TCA)和承载齿面接触分析(loaded tooth contact analysis, LTCA)^[2],从而

降低产品的开发时间和成本。国外学者将结合设计理论与TCA技术,对受载时的弯曲应力、轮齿变形、传动误差和重合度等进行理论和试验研究,并对准双曲面齿轮传动的振动噪声的产生原因进行分析和优化设计^[3-8];国内学者提出结合了有限元法及柔度矩阵法的准双曲面齿轮齿面加载接触分析理论,对齿面边缘接触、安装位置偏差和摩擦承载接触等问题进行了研究^[9-15]。

准双曲面齿轮接触特性是国内外学者的重要研究方向之一,但是现有研究方法有一些不足,如齿轮模型不完

整、忽略了支撑刚度的影响、没有载荷的影响特征分析和缺乏试验验证等。

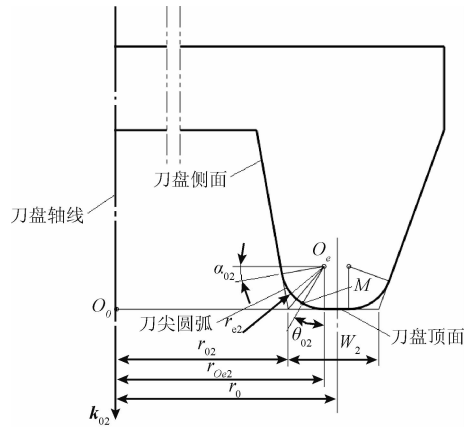
因此本文全面考虑形状、位置、结构和载荷等参数的影响,建立了精确的准双曲面齿轮传动系统有限元模型,进行准静态工况下的加载接触特性分析,得到了齿面接触斑点、传动误差曲线、齿根弯曲应力和接触应力等重要参数并进行试验验证。研究成果也将会对准双曲面齿轮的优化设计、性能分析、工作寿命预测和动力学分析等提供理论和试验依据。

2 齿面和过渡曲面建模

2.1 大轮齿面和过渡曲面建模

大轮齿面与过渡曲面的成形过程如图1所示。图1(b)为刀盘轴截面,刀盘侧面加工齿面,刀盘顶面加工根锥面,刀尖圆弧加工过渡曲面。

图1中 σ_2 为大轮机床坐标系, p_2 为大轮轴线方向单位矢量, α_{02} 为大轮刀盘压力角, σ_{02} 为大轮刀盘坐标系, S_2 为径向刀位, q_2 为角向刀位, E_{02} 为垂直轮位, X_{02} 为轴向轮位, X_{B2} 为床位, δ_{M2} 机床根角, r_0 为刀盘名义半径, W_2 为刀顶距, r_{e2} 为刀尖圆弧半径, O_e 为刀尖圆弧圆心, M_0 为刀尖顶点, θ_2 为过 O_0M_0 的刀盘轴截面与 i_2 夹角, r_{02} 为刀尖半径。在图1(a)中,设 $|\overline{MM_0}| = s_2$,则在 σ_{02} 中,剖面上 M 点的径矢 r_{e2} 和法矢 n_{e2} 分别如式(1)、(2)。



(b) 大轮刀盘轴截面
(b) The axial section of gear cutter

图1 大轮齿面和过渡曲面成形过程

Fig. 1 Forming process of flake and fillet of gear

$$r_{e2}(s_2, \theta_2) = \begin{bmatrix} (r_{02} - s_2 \sin \alpha_{02}) \cos \theta_2 \\ (r_{02} - s_2 \sin \alpha_{02}) \sin \theta_2 \\ -s_2 \cos \alpha_{02} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$n_{e2}(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{02} \cos \theta_2 \\ \cos \alpha_{02} \sin \theta_2 \\ -\sin \alpha_{02} \end{bmatrix} \quad (2)$$

设 $\overline{O_eM}$ 与刀盘轴线夹角 θ_{02} ,则刀尖圆弧上 M 的径矢 r_{e2} 和法矢 n_{e2} 分别为:

$$r_{e2}(\theta_{02}, \theta_2) = \begin{bmatrix} (r_{0e2} \mp r_{e2} \sin \theta_{02}) \cos \theta_2 \\ (r_{0e2} \mp r_{e2} \sin \theta_{02}) \sin \theta_2 \\ r_{e2} (\cos \theta_{02} - 1) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$n_{e2}(\theta_{02}, \theta_2) = \begin{bmatrix} \sin \theta_{02} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_{02} \sin \theta_2 \\ \mp \cos \theta_{02} \end{bmatrix} \quad (4)$$

设刀盘绕 k 旋转 Δq_2 ,则 σ_{02} 和 σ_2 的关系为:

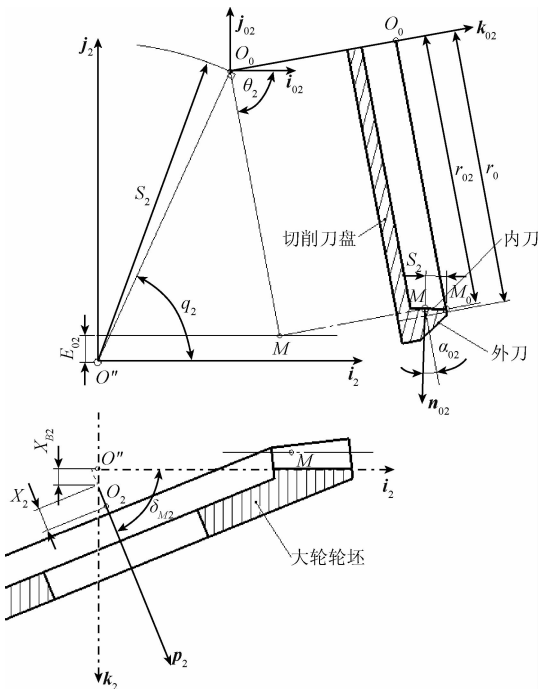
$$M_{\sigma_{02}}(\Delta q_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & S_2 \cos(q_2 + \Delta q_2) \\ 0 & 1 & 0 & S_2 \sin(q_2 + \Delta q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

设大轮坐标系 σ_g 沿 j 移动 E_{02} ,则:

$$M_{E_{02}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E_{02} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

再沿 k 移动 X_{B2} ,则:

$$M_{X_{B2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X_{B2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$



(a) 大轮与刀具位置关系
(a) The positional relation of gear and cutting tool

再绕 j 旋转 $(90^\circ - \delta_{M2})$, 则:

$$M_{\delta_{M2}} = \begin{bmatrix} \sin\delta_{M2} & 0 & \cos\delta_{M2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\cos\delta_{M2} & 0 & \sin\delta_{M2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

再沿 p_2 移动 X_2 , 则:

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

刀盘绕 k 旋转 Δq_2 , 大轮绕 p_2 旋转 $\psi_2 = i_{02}\Delta q_2$, 则

$$M_{\psi_2}(\Delta q_2) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_2) & -\sin(\psi_2) & 0 & 0 \\ \sin(\psi_2) & \cos(\psi_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

综上得 σ_g 与 σ_2 的关系为:

$$M_{\sigma_g} = M_{E_{02}} M_{X_{02}} M_{\delta_{M2}} M_{X_2} M_{\psi_2} \quad (11)$$

σ_{02} 与 σ_g 的关系为:

$$M_{02}(\Delta q_2) = (M_{\sigma_g})^{-1} M_{\sigma_{02}} \quad (12)$$

共轭齿面上任意一点相对速度为:

$$v_g(s_2, \theta_2, \Delta q_2) = \frac{\partial r_2}{\partial \psi_2} \quad (13)$$

代入啮合方程, 则:

$$v_g \cdot n_2 = 0 \quad (14)$$

终得大轮齿面和过渡曲面的方程 $r_2(\theta_2, \Delta q_2)$, 如图2所示。

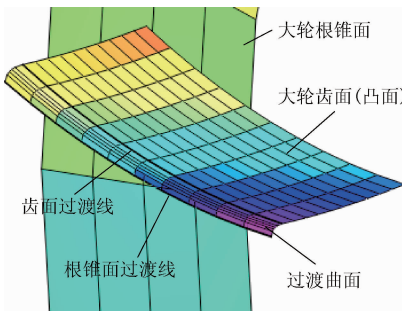
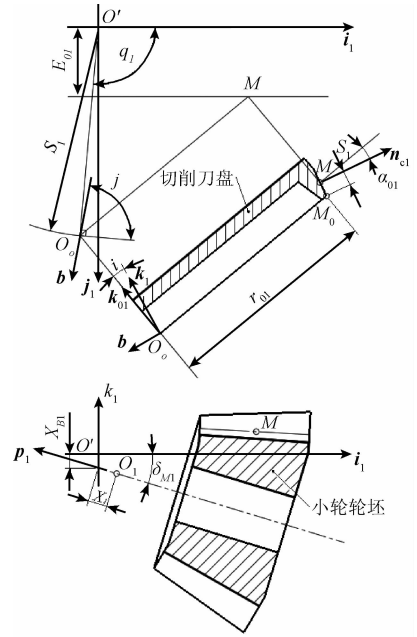


图2 大轮齿面和过渡曲面
Fig.2 Flake and fillet of gear

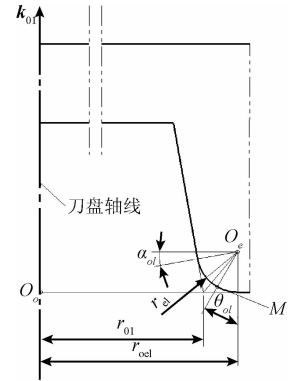
2.2 小轮齿面和过渡曲面建模

小轮使用刀倾机构和单面法加工等原因, 小轮齿面建模要复杂于大轮。小轮齿面与过渡曲面的成形过程如图3所示。

图3中, σ_1 为小轮机床坐标系, p_1 为小轮轴线方向



(a) 小轮与刀具位置关系
(a) The positional relation of pinion blank and cutting



(b) 小轮刀盘轴截面
(b) The axial section of pinion cutter

图3 小轮齿面和过渡曲面成形过程

Fig.3 Forming process of flake and fillet of pinion

的单位矢量, α_{01} 为小轮轮刀盘压力角, σ_{01} 为小轮刀盘坐标系, b 为 k_{01} 在平面 $i_1 - j_1$ 上的投影; S_1 为径向刀位, q_1 为角向刀位, E_{01} 为垂直轮位, X_{01} 为轴向轮位, X_{B1} 为床位, δ_{M1} 机床根角, j 为刀转角, i 为刀倾角, r_{01} 刀尖半径, r_{c1} 为刀尖圆弧半径, θ_1 为过 O_0M_0 的刀盘轴截面与 i_1 的夹角。在图3(a)中, 设 $|MM_0| = s_1$, 则在 σ_{01} 中, 侧切削面上 M 点的径矢 r_{c1} 和法矢 n_{c1} 分别为:

$$r_{c1}(s_1, \theta_1) = \begin{bmatrix} (r_{01} - s_1 \sin\alpha_{01}) \cos\theta_1 \\ (r_{01} - s_1 \sin\alpha_{01}) \sin\theta_1 \\ -s_1 \cos\alpha_{01} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$n_{c1}(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{01} \cos\theta_1 \\ \cos\alpha_{01} \sin\theta_1 \\ -\sin\alpha_{01} \end{bmatrix} \quad (16)$$

设 $\overline{O_c M}$ 与刀盘轴线夹角 θ_{01} , 刀尖圆弧上 M 的径矢 r_{e1} 和法矢 n_{e1} 分别为:

$$r_{e1}(\theta_{01}, \theta_1) = \begin{bmatrix} (r_{oe1} \mp r_{e1} \sin\theta_{01}) \cos\theta_1 \\ (r_{oe1} \mp r_{e1} \sin\theta_{01}) \sin\theta_1 \\ r_{e1}(1 - \cos\theta_{01}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$n_{e1}(\theta_{01}, \theta_1) = \begin{bmatrix} \sin\theta_{01} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_{01} \sin\theta_1 \\ \pm \cos\theta_{01} \end{bmatrix} \quad (18)$$

假设刀盘绕 k 旋 Δq_1 , 则:

$$M_{\Delta q_1}(\Delta q_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & S_1 \cos(q_1 + \Delta q_1) \\ 0 & 1 & 0 & S_1 \sin(q_1 + \Delta q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

σ_{01} 绕 k_{01} 旋转 $(q_1 - j)$, 则:

$$M_j = \begin{bmatrix} \cos(q_1 - j) & -\sin(q_1 - j) & 0 & 0 \\ \sin(q_1 - j) & \cos(q_1 - j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

再绕 i_{01} 旋转 i , 则:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i & 0 \\ 0 & -\sin i & \cos i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

综上得 σ_{01} 与 σ_1 的关系为:

$$M_{\sigma_{01}}(\Delta q_1) = M_{\Delta q_1} M_j M_i \quad (22)$$

σ_p 沿 j 移动 E_{01} , 则:

$$M_{E_{01}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E_{01} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

再沿 k 移动 $-X_{B1}$, 则:

$$M_{X_{B1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -X_{B1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

再绕 j 旋转 $(90^\circ - \delta_{M1})$, 则

$$M_{\delta_{M1}} = \begin{bmatrix} \sin\delta_{M1} & 0 & -\cos\delta_{M1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos\delta_{M1} & 0 & \sin\delta_{M1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

再沿 p_1 移动 $-X_1$, 则:

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -X_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

刀盘绕 k 旋转 Δq_1 时, 小轮绕 p_1 旋转 $\psi_1 = i_{01} \Delta q_1$, 则:

$$M_{\psi_1}(\Delta q_1) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_1) & -\sin(\psi_1) & 0 & 0 \\ \sin(\psi_1) & \cos(\psi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

综上得 σ_p 与 σ_1 的关系为:

$$M_{\sigma_p} = M_{E_{01}} M_{X_{B1}} M_{\delta_{M1}} M_{X_1} M_{\psi_1} \quad (28)$$

同理, 终得小轮齿面和过渡曲面的方程 $r_1(\theta_1, \Delta q_1)$, 如图 4 所示。

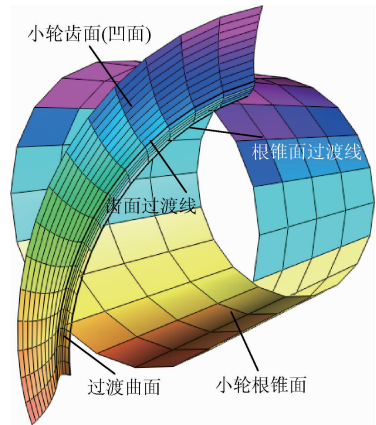


图4 小轮齿面和过渡曲面
Fig. 4 Flake and fillet of pinion

3 齿轮副装配模型

3.1 计算实例

为验证第2节齿面和过渡曲面数学模型的正确性及进行齿面接触特性分析, 本文选用一准双曲面齿轮副实例进行实例计算, 其几何参数如表1所示。

表1 准双曲面齿轮副的几何参数

Table 1 Geometric parameters of the hypoid gear pair		
几何参数名称和单位	小轮	大轮
齿数 z_1, z_2	9	35
旋向	左旋	右旋
模数 m/mm	4.899	
轴交角 $\Sigma/(\circ)$	90	
偏置距 E/mm	44.45	
节圆直径 $d_1, d_2/\text{mm}$	64.913	171.45
齿面宽 $b_1, b_2/\text{mm}$	38.41	26.92
螺旋角 $\beta_1, \beta_2/(\circ)$	50	15.63

准双曲面齿轮传动的齿面接触斑点和传动误差曲线是其啮合特性的重要体现。而理想的齿面接触斑点和传

动误差曲线是修正机床加工参数而得到的,如何修正加工参数不是本文的讨论内容,因此此处假定齿面接触斑点和传动误差曲线是已知的,大轮凸面和小轮凹面为主要工作齿面,因此本文也将其作为研究对象,其理想啮合特性如图5所示。

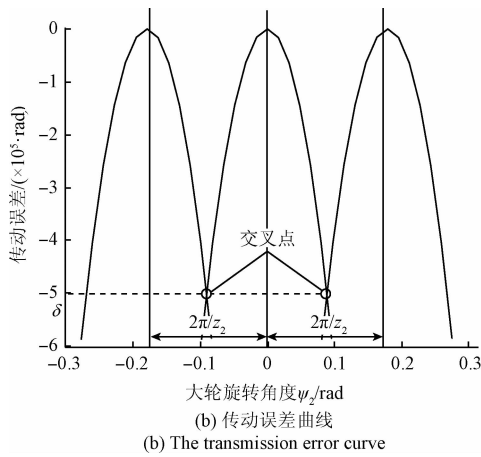
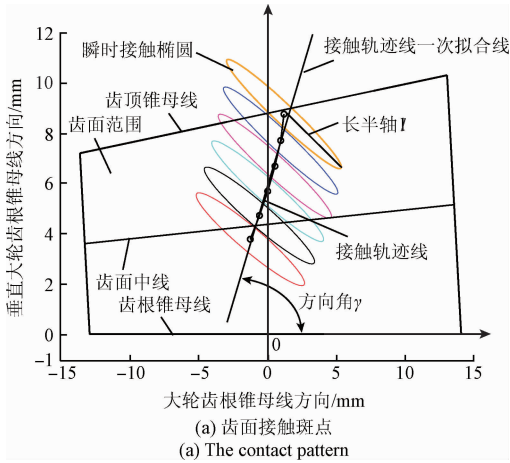


图5 理想的大轮凸面和小轮凹面啮合特性
Fig.5 Ideal meshing characteristics of gear convex and pinion concave faces

如图5所示,设定3个指标来评价齿面接触斑点和传动误差曲线,分别为平均接触椭圆长半轴 l 、接触线方向角 γ 和传动误差曲线交点 δ ,理想状态下,取值为 $l = 4 \text{ mm}$ 、 $\gamma = 60^\circ$ 和 $\delta = -5 \times 10^{-5} \text{ rad}$ 。

3.2 装配模型

由上文建立数学模型分别计算准双曲面齿轮的大、小轮的齿面和过渡曲面,将点阵数据导入三维软件 Pro/Engineer,拟合样条曲线,如图6所示。

以样条曲线构造大、小齿轮实体模型,再按照理论安装位置进行装配,即得准双曲面齿轮副模型。

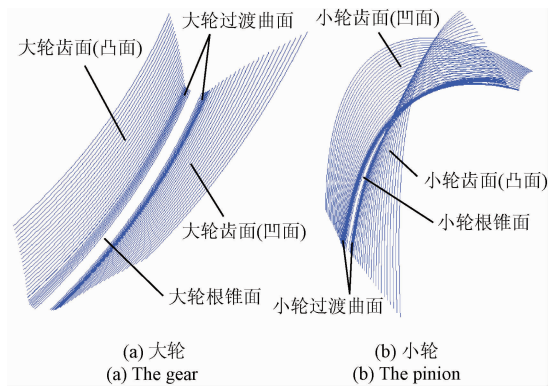


图6 大、小轮的样条曲线
Fig.6 The spline curves of the gear and pinion

4 齿轮副实体装配模型

本文应用 ABAQUS 进行准双曲面齿轮准静态工况下加载接触特性分析。

4.1 传动系统模型

真实的准双曲面齿轮传动系统应包含齿轮轴,支撑轴承、箱体等,为了节省计算时间,且基于准静态工况下的准双曲面齿轮加载齿面接触分析的目的,本文建立的传动系统模型如图7所示。此模型忽略支撑轴承和箱体等次要结构部分,保留轮坯、轮齿和转轴等关键结构部分。大轮采用两端支承结构,小轮则悬臂支承。动力 T_1 和运动 ω_1 从小轮的轴承支撑位输入,载荷 T_2 从大轮的轴承支撑位输入。

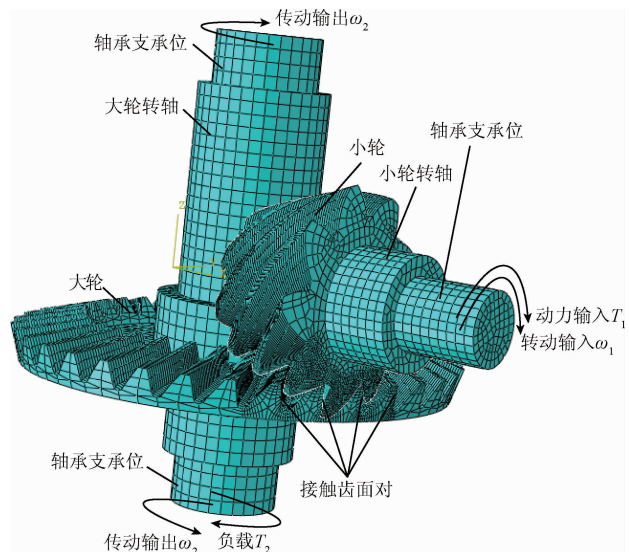


图7 准双曲面齿轮传动系统有限元模型
Fig.7 Finite element model of the hypoid drive system

4.2 材料、接触定义及网格划分

设齿轮和转轴的弹性模量为 2.1×10^5 MPa,泊松比为 0.3,摩擦系数为 0.1。网格类型采用八结点线性六面体单元,对接触齿面进行网格细化。

4.3 分析过程

齿面加载接触分析主要有如下 3 步:

- 1) 消除齿侧间隙,使得两齿面初始接触;
- 2) 载荷 T_2 输入,使得两齿面受载接触;
- 3) 运动 ω_1 输入,使得齿轮副受载传递运动。

5 有限元分析结果

5.1 齿面接触斑点

图 8 所示为 $T_2 = 100, 200, 400, 600$ N·m 时,大轮齿面接触斑点。

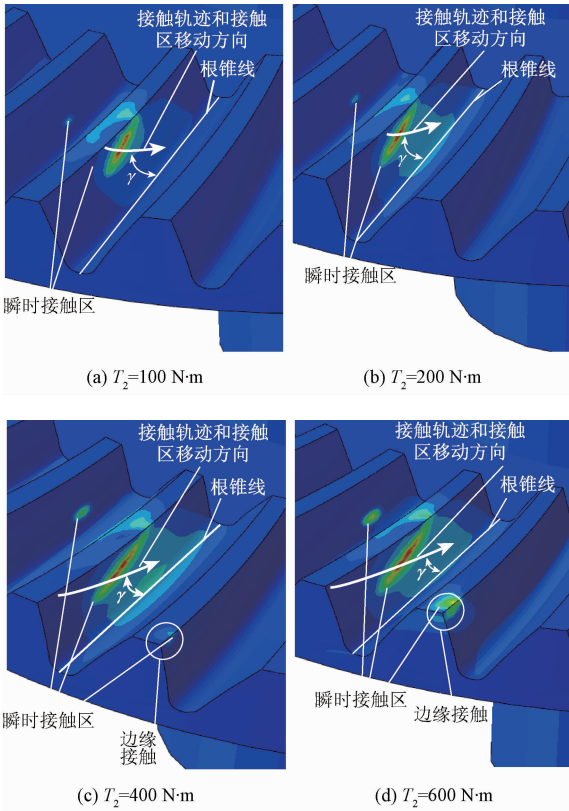


图 8 大轮凸面接触斑点随载荷的变化情况

Fig. 8 Loaded contact pattern of the gear convex face

如图 8 所示, T_2 较小时,齿面接触斑点和接触轨迹线与设计值一致。 T_2 增大时,瞬时接触斑点变大,方向角 γ 变小,接触线变长。随着 T_2 的增大,齿面接触斑点向齿面大端延伸,而不会向小端延伸。因此实际安装位置应使轻载时齿面接触斑点靠近小端,才能完全发挥齿面的承载能力。

5.2 齿面接触应力

图 9 所示为 $T_2 = 200, 400$ N·m 时,大轮和小轮的接触应力 σ_{H2} 和 σ_{H1} 。

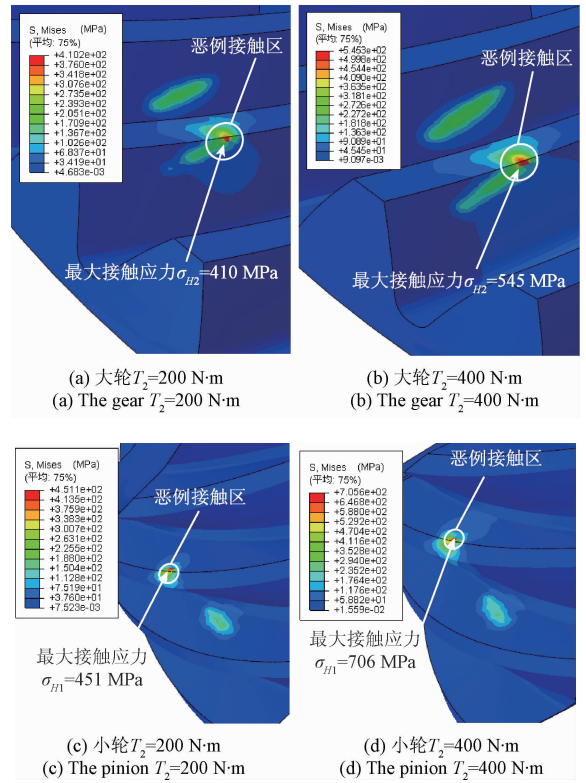


图 9 大轮凸面和小轮凹面接触应力随载荷的变化情况

Fig. 9 Contact stresses of gear convex and pinion concave faces

如图 9 所示,当 T_2 增大时, σ_{H2} 和 σ_{H1} 也增大。 σ_{H1} 的有限元与经验计算结果 (GB/T10062) 的对照如表 2 所示。

表 2 接触应力的有限元与经验计算结果对照
Table 2 Results comparison of FEM and empirical formula of contact stresses

载荷 $T_2 / (\text{N} \cdot \text{m})$	有限元结果 σ_H / MPa	经验公式结果 σ_H / MPa
100	294	390
200	451	555
400	706	786

如表 2 所示,有限元分析和经验计算结果是基本一致的。

5.3 齿根弯曲应力

图 10 所示为 $T_2 = 200, 400$ N·m 时,大、小轮齿根最大弯曲应力 σ_{F2} 和 σ_{F1} 。

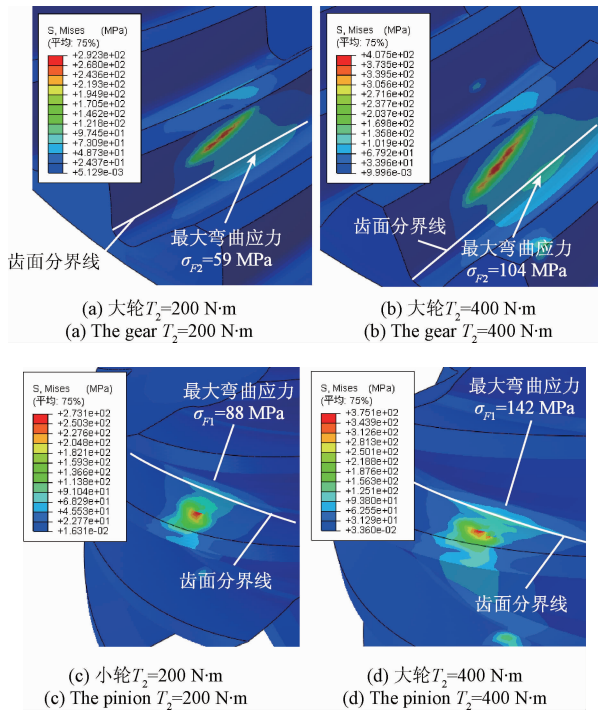


图 10 大轮和小轮齿根弯曲应力随载荷的变化情况
Fig. 10 Bending stresses of gear and pinion

如图 10 所示,齿面过渡线处的齿根弯曲应力最大,当 T_2 增大时,弯曲应力也增大,大轮最大齿根弯曲应力 σ_{r2} 小于小轮的最大齿根弯曲应力 σ_{f1} 。 σ_F 有限元与经验计算结果的对照如表 3 所示。

表 3 齿根弯曲应力的有限元与经验计算结果对照
Table 3 Results comparison of FEM and empirical formula of bending stresses

载荷 $T_2/(N \cdot m)$	大轮 σ_{r2}/MPa		小轮 σ_{f1}/MPa	
	有限元	经验公式	有限元	经验公式
100	32	36	53	40
200	59	73	88	80
400	104	146	142	159

如表 3 所示,有限元分析与经验计算结果是基本一致的,而当 T_2 较大时,经验值偏大于有限元分析结果,这是由于经验值没有考虑载荷使得齿轮副真实重合度增大的因素。

图 11 所示为载荷 $T_2 = 100, 200, 400 N \cdot m$ 时,大、小轮齿面过渡线各点的最大弯曲应力。

如图 11 所示,当 T_2 较小时,大端齿根弯曲应力小于小端,这是由于大端模数大于小端,因此大端轮齿的抗弯曲能力相对较强。当 T_2 增大时,接触斑点在小轮上的移动方向是从大端齿根到小端齿顶,当接触斑点出现在小

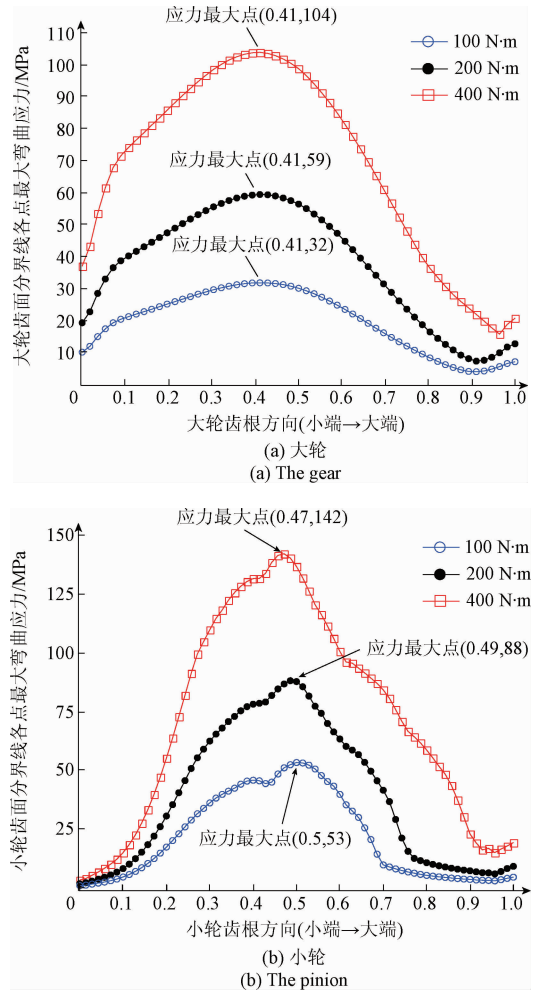


图 11 大、小轮齿面过渡线各点的最大弯曲应力
Fig. 11 The maximum value of bending stresses of the boundary of gear and pinion faces

轮大端齿根时,使小轮大端的齿根弯曲应力比小端略大。大、小轮齿根最大弯曲应力的齿向位置基本不变。小轮的齿向距离比大轮约大 1 倍,因此小轮齿根弯曲应力在齿向方向上的分布更加集中。

当 $T_2 = 400 N \cdot m$ 时,大、小轮齿面过渡线各点弯曲应力随转角的变化如图 12 所示。

如图 12(a) 所示,大轮齿根由受拉变为受压,受载过程历经约 3 个齿距角 $\psi_p = 2\pi/z_2$, 由于拉、压的共同作用,使得大轮小端齿根没有出现压应力极值。如图 12(b) 所示,小轮齿根由受压变为受拉,受载过程要比大轮短,由于接触斑点移动和拉、压共同影响,在小轮中部,出现了多个应力小波峰。

小轮齿根应力峰值要高于大轮;而大轮齿根应力分布要均于小轮。令大轮齿面过渡线各节点的平均应力 σ_{r2} 如式(29)。

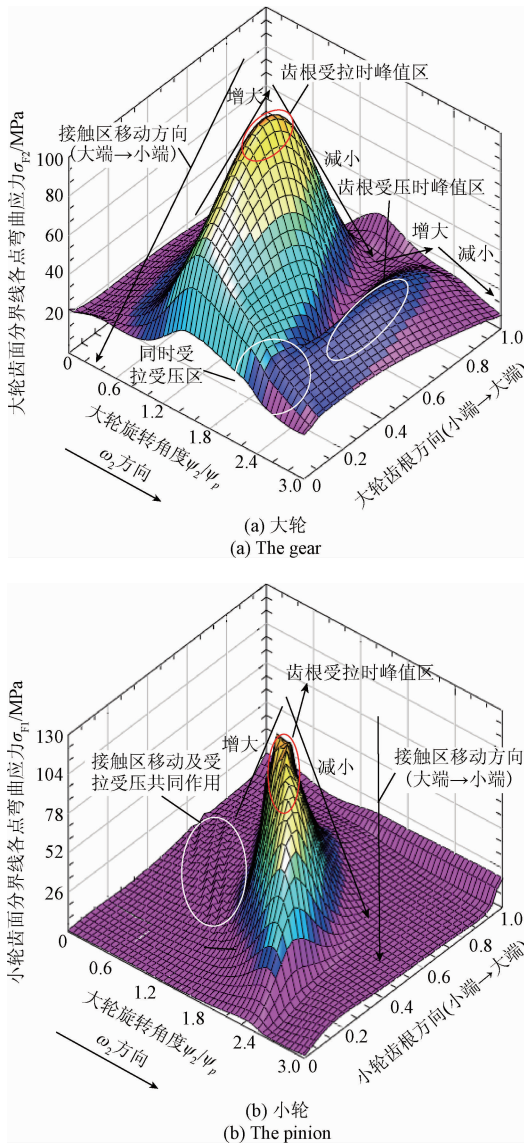


图 12 大、小轮齿面过渡线各点弯曲应力的变化
Fig. 12 The change of bending stresses of the boundary of gear and pinion faces

$$\overline{\sigma_{F2}} = \frac{\int_{t=0}^T \sum_{k=1}^{N_2} \sigma_{F2}^k(t) dt}{T} \quad (29)$$

式中： $\sigma_{F2}^k(t)$ 为大轮齿面过渡线上各节点应力， N_2 为大轮齿面过渡线节点总数， T 为时间， $T = 3\psi_p/\omega_2$ 。

令小轮齿面过渡线上各节点的平均应力 $\overline{\sigma_{F1}}$ 为：

$$\overline{\sigma_{F1}} = \frac{\int_{t=0}^T \sum_{k=1}^{N_1} \sigma_{F1}^k(t) dt}{T} \quad (30)$$

式中： $\sigma_{F1}^k(t)$ 为小轮齿面过渡线上各节点应力， N_1 为小

轮齿面过渡线节点总数。

当 $T_2 = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$ 时，得 $\overline{\sigma_{F2}} = 40.6 \text{ MPa}$ ， $\overline{\sigma_{F1}} = 19.7 \text{ MPa}$ ，可见大轮齿根所受的平均齿根弯曲应力要大于小轮。

5.4 传动误差

图 13 所示为 $T_2 = 100, 200, 400 \text{ N} \cdot \text{m}$ 时，齿轮副的传动误差。

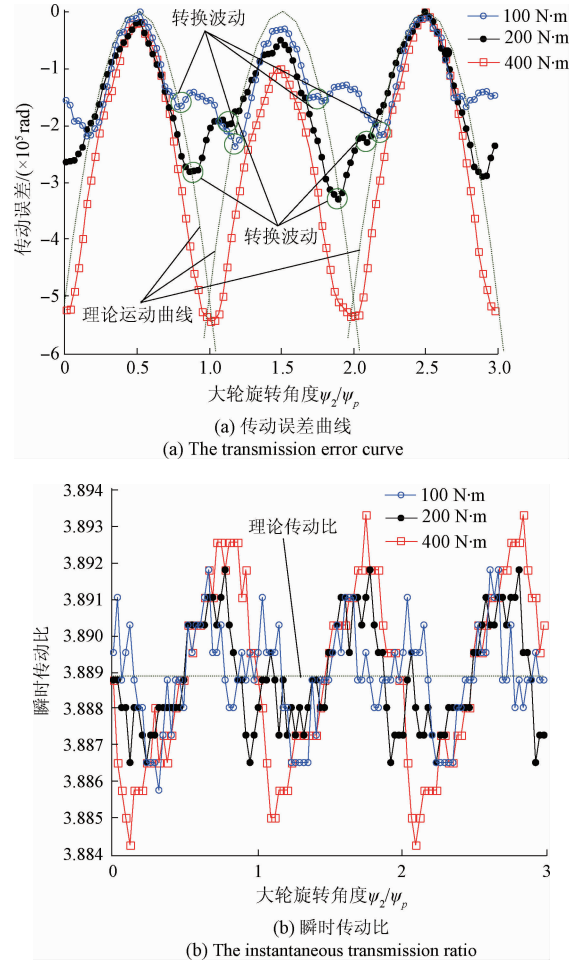


图 13 齿轮副传动误差随载荷的变化情况
Fig. 13 The loaded transmission error of the gear pair

如图 5(b) 所示，理论传动误差曲线是各自独立且相交的，如图 13(a) 所示，真实传动误差曲线是连续且以 ψ_p 为周期波动的。

如图 5(b) 所示，理论传动误差曲线的交点为 $\delta = -5 \times 10^{-5} \text{ rad}$ ；当 T_2 较小时，齿轮副在一对和两对齿面接触之间不断地依次转换，因此有运动转换波动；由于齿轮副卸载变量增大，使得传动误差波动的幅值随着 T_2 的增大而增大；当 T_2 继续增大时，齿轮副在两对和 3 对齿面接触之间不断依次转换，因此运动转换波动不明显的。

图13(b)中,瞬时传动比*i(t)*为:

$$i(t) = \Delta\psi_2(t)/\Delta\psi_1(t) \quad (31)$$

式中: $\Delta\psi_2(t)$ 为大轮瞬时旋转角度, $\Delta\psi_1(t)$ 为小轮瞬时旋转角度。

如图13(b)所示,*i(t)*在理论值附近波动,当 T_2 较小时,*i(t)*波动幅值变化不明显;而随着 T_2 的增大,齿轮副受载变形增大,*i(t)*的波动幅值增大。

6 试验验证

6.1 试验台

本文开发的准双曲面齿轮齿面接触斑点和齿根弯曲应力试验台如图14所示。

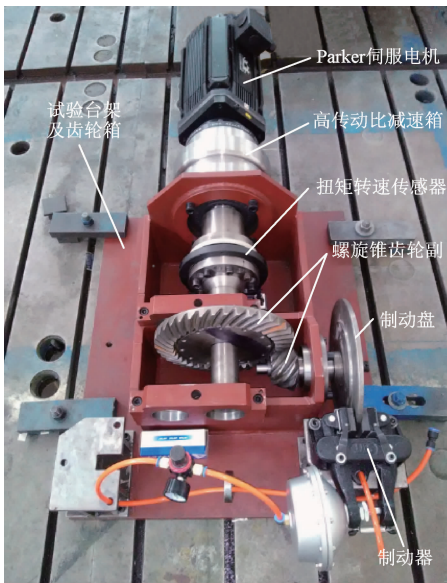


图14 试验台
Fig. 14 Test bed

如图14所示,试验台由伺服电机和减速箱驱动,由制动盘给传动系统施加载荷。

6.2 齿面接触斑点检测

齿轮副轻载时接触斑点靠近齿轮小端,当加载 $T_2 = 100, 400, 800 \text{ N}\cdot\text{m}$ 时,齿面接触斑点真实图像和仿真结果对照,如图15所示。

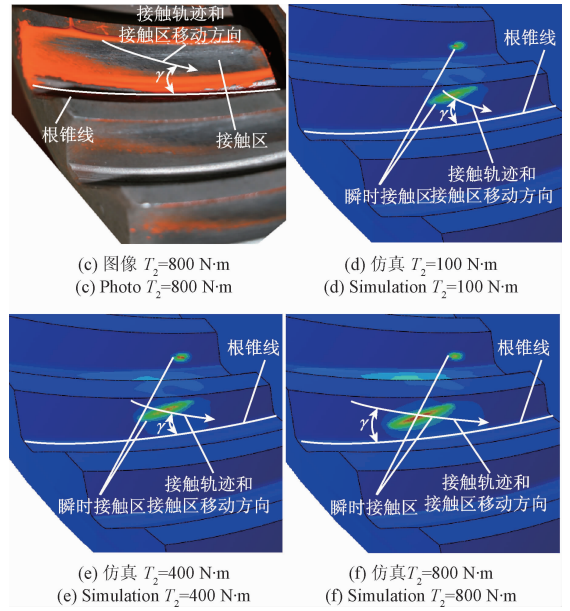
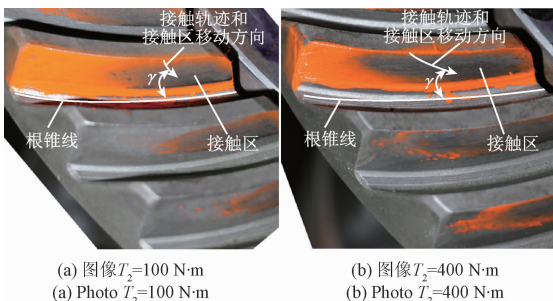


图15 齿面接触斑点检测与仿真结果对照
Fig. 15 Results comparison of test and FEM of contact pattern

如图15所示,当 T_2 增大时,齿面接触斑点变大, γ 变小,接触轨迹线变长,接触斑点将向齿轮大端延伸。接触斑点仿真结果与真实图像相一致,由此论证了第5节有限元分析方法的正确性。

6.3 齿根弯曲应力检测

将5个应变片均布在大轮一轮齿的齿面过渡线上,如图16所示。

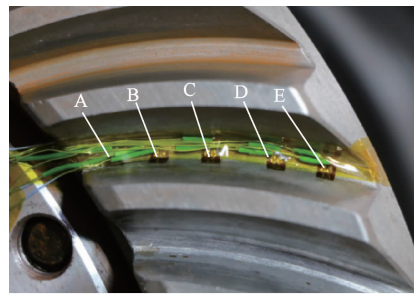


图16 应变片安装
Fig. 16 Installation of strain gages

当加载 $T_2 = 400, 800, 1200 \text{ N}\cdot\text{m}$ 时,齿根弯曲应力仿真和试验结果如图17所示。

如图17所示,齿根弯曲应力的仿真与试验结果的变化趋势相一致,当 T_2 增大时,弯曲应力的极值点位置移向轮齿大端。但由于应变片所反映的齿高方向应力与有限元仿真的各方向平均应力值的不同,且由于应变片的粘贴位置误差和检测精度等因素的影响,使得实测值难与仿真结果完全一致。

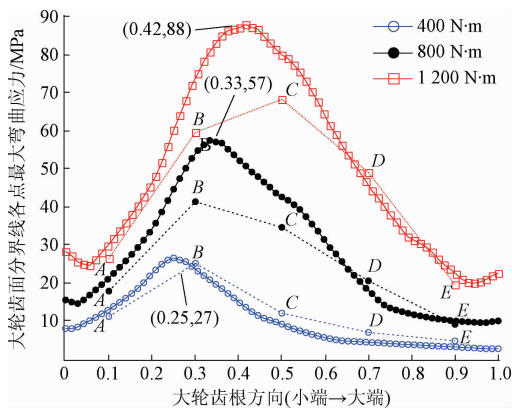


图 17 齿根弯曲应力检测与仿真结果比较

Fig. 17 Results comparison of test and FEM of bending stresses

7 结 论

建立精确地准双曲面齿轮的大、小轮齿面和过渡曲面的数学模型;建立包含齿面、过渡曲面、轮坯和根锥面的精确准双曲面齿轮副实体模型;建立准双曲面齿轮传动系统有限元分析模型;进行加载接触分析,得到准双曲面齿轮接触应力、弯曲应力和传动误差的变化规律,分析了载荷对齿轮副啮合特性的影响情况;开发准双曲面齿轮试验台,进行齿面接触斑点和齿根弯曲应力检测,试验与仿真结果的一致性较好。

参考文献

- [1] LITVIN F L, FUENTES A. Gear geometry and applied theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [2] 汪中厚,周晓玲. 螺旋锥齿轮动力学研究方法及进展[J]. 中国机械工程, 2006, 17(11): 1203-1208.
WANG ZH H, ZHOU X L. Simulation methods and developments of dynamics for spiral bevel gears [J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17 (11): 1203-1208.
- [3] LITVIN F L, VECCHIATO D, YUKISHIMA K, et al. Reduction of noise of loaded and unloaded misaligned gear drives[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(41): 5523-5536.
- [4] GUINGAND M, DE VAUJANY J P, JACQUIN C Y. Quasi-static analysis of a face gear under torque [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39): 4301-4318.
- [5] DE VAUJANY J P, GUINGAND M, REMOND D, et al. Numerical and experimental study of the loaded

transmission error of a spiral bevel gear[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(2): 195-200.

- [6] SHEVELEVA G I, VOLKOV A E, MEDVEDEV V I. Algorithms for analysis of meshing and contact of spiral bevel gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(2): 198-215.
- [7] SIMON V. Head-cutter for optimal tooth modifications in spiral bevel gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(7): 1420-1435.
- [8] HOTAIT M A, KAHRAMAN A. Estimation of bending fatigue life of hypoid gears using a multiaxial fatigue criterion [J]. Journal of Mechanical Design, 2013, 135(10): 101005.
- [9] 屈文涛,沈允文,徐建宁. 基于 ANSYS 的双圆弧齿轮接触应力有限元分析[J]. 农业机械学报, 2006, 37(10): 139-141.
QU W T, SHEN Y W, XU J N. Finite element analysis of contact stress for double-arc gear based on ANSYS[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2006, 37(10): 139-141.
- [10] ZHANG J, FANG Z, CAO X, et al. The modified pitch cone design of the hypoid gear: manufacture, stress analysis and experimental tests [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(2): 147-158.
- [11] WANG Z, ZHOU X, OGUMA T, et al. Surface error measurement of spiral bevel gears using scanning measurement [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2007, 28(2): 229-235.
- [12] 汪中厚,赵东升,久保爱三,等. 螺旋锥齿轮齿面测量仪精度评定法[J]. 仪器仪表学报, 2009, 30(8): 1752-1756.
WANG ZH H, ZHAO D SH, KUBO A, et al. Accuracy evaluation method of gear measurement instrument for spiral bevel gears [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2009, 30(8): 1752-1756.
- [13] 王峰,方宗德,李声晋,等. 考虑安装误差的摆线齿准双曲面齿轮轮齿接触分析[J]. 农业机械学, 2012, 43(9): 213-218.
WANG F, FANG Z D, LI SH J, et al. Tooth contact analysis of epicycloid hypoid gear considering assembly misalignment[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 2012, 43(9): 213-218.
- [14] 李刚,汪中厚,耿直,等. 基于非特征分块插值技术的准双曲面齿轮数字化真实齿面建模方法[J]. 机械工程学报, 2015, 51(7): 77-84.
LI G, WANG ZH H, GENG ZH, et al. Modeling

approach of digital real tooth surfaces of hypoid gears based on non-geometric-feature segmentation and interpolation algorithm [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(7):77-84.

- [15] 王志永, 刘威, 曾韬, 等. 螺旋锥齿轮大轮齿形误差的在机测量 [J]. *仪器仪表学报*, 2015, 36(5): 1047-1053.

WANG ZH Y, LIU W, ZENG T, et al. On-machine measurement of tooth profile errors for the spiral bevel gears [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2015, 36(5):1047-1053.

作者简介



卓耀彬(通讯作者), 2004年于西安交通大学获得学士学位, 分别在2006年和2016年于浙江大学获得硕士学位和博士学位, 现为丽水学院讲师, 主要研究方向为机械制造自动化、检测技术及机械动力学。

E-mail : zhuoyaobin@163.com

Zhuo Yaobin (Corresponding author) received his B. Sc. degree in 1984 from Xi'an Jiaotong University, and his M. Sc. and Ph. D. degrees both from Zhejiang University in 2006 and 2016, respectively. Now, he is a lecturer in Lishui University. His main research directions include machinery manufacturing automation, detection technology and mechanical dynamics.



周晓军, 1993年于浙江大学获得博士学位, 现为浙江大学教授、博士生导师, 主要研究方向为检测技术、信息处理、质量保证、车辆测试与机械制造自动化。

E-mail : cmeesky@163.com

Zhou Xiaojun received his Ph. D. degree from Zhejiang University in 1993. Now he is a professor and doctoral supervisor in Zhejiang University. His main research directions include detection technology, information processing, quality assurance, vehicle test and machinery manufacturing automation.