

DOI: 10.19650/j.cnki.cjsi.J2514364

密度场理论下 Delta 机器人最大内切工作曲线的双模求解方法

黄飞翔, 鄢 然, 马鹏程, 夏 磊, 赵 青
(重庆理工大学机械工程学院 重庆 400054)

摘 要:针对 Delta 并联机器人工作空间标定困难的问题,提出一种基于密度场理论的最大内切工作曲线通用求解框架。该方法通过空间点集统计建模构建连续密度场,将复杂的边界求解问题转化为密度梯度极值检测问题,有效规避了传统几何法对复杂曲面显式建模的依赖,克服了数值离散法精度依赖采样密度、参数调优复杂的固有限制。核心创新点在于构建了不依赖额外参数的普适性求解器,并开发了双路径互补机制:一方面,基于运动学方程的解析公式法通过精确计算圆周上有效点比例,实现高精度最大内切曲线生成,适用于结构参数优化设计;另一方面,基于核密度估计(KDE)的数值点集法通过将离散点云转换为连续概率密度函数,利用极值点判别边界,生成自带安全裕度的工程适用曲线。实验结果表明,解析公式法求得的边界曲线上最大关节角度运动偏差不超过 0.056° ,且严格满足第四轴双曲面约束与球铰链转角限制,验证了求解方法的准确性。通过安全裕度实验证明了数值点集法的边界曲线相较于解析公式法的边界曲线在径向方向上主动预留了安全裕度,可作为实际运动控制的限位边界。该方法兼具理论普适性与工程实用性,为高速并联机器人的轨迹规划、运动控制及尺度综合研究提供了新的理论工具。

关键词: Delta 并联机器人;密度场理论;最大内切曲线;核密度估计;运动学约束

中图分类号: TH112 TP242.2 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 460.15

A dual-mode solving method for maximum inscribed workspace curve of Delta robots based on density field theory

Huang Feixiang, Yan Ran, Ma Pengcheng, Xia Lei, Zhao Qing

(College of Mechanical Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: To address the challenge of calibrating the workspace of Delta parallel robots, this study proposes a general solution framework of searching the maximum inscribed working curve based on density field theory. This method constructs a continuous density field through the statistical modeling of spatial point sets, which transforms the complex boundary determination problem into a density gradient extremum detection problem. It effectively avoids the reliance of traditional geometric methods on the explicit modeling of complex surfaces and simultaneously overcomes the inherent accuracy limitations of numerical discretization methods that depend on the sampling density and require the complex parameter tuning. The core innovation lies in the development of a universal solver that does not rely on additional parameters and a dual-path complementary mechanism: On one hand, the analytical formula method based on kinematic equations achieves high-precision generation of the maximum inscribed curve by precisely calculating the proportion of effective points on the circumference, making it suitable for the structural parameter optimization design; On the other hand, the numerical point set method based on kernel density estimation (KDE) converts discrete point clouds into continuous probability density functions, identifies boundaries using extrema and generates engineering-grade curves with built-in safety margins. Experimental results show that the maximum joint angle deviation of the boundary curve obtained by the analytical formula method does not exceed 0.056° , which strictly satisfies the fourth-axis hyperbolic surface constraint and the spherical hinge rotation angle limit, verifying the accuracy of the solution method. The safety margin experiments demonstrate that compared to the boundary curve derived from the analytical formula method, the boundary curve generated by the numerical point set method proactively reserves a safety margin in the radial direction and can serve as a limit boundary of actual motion

control. In conclusion, this method combing the theoretical universality with engineering practicality provides a new theoretical tool for the comprehensive study of trajectory planning, motion control and scaling of high-speed parallel robots.

Keywords: delta parallel robot; density field theory; maximum inscribed curve; KDE; kinematic constraints

0 引言

工作空间大小是评价机器人运动性能的核心指标之一,直接影响其轨迹规划能力与任务适应能力^[1-2]。自 Clavel^[3]发明 Delta 并联机构以来,该机构凭借高加速度、低运动惯量及高刚度等特性,成为高速操作的首选构型,已广泛应用于医药分拣、食品包装、电子装配等工业场景,显著提升了产线效率。

然而,与串联机器人相比,并联机构存在工作空间相对较小且结构参数优化复杂的固有缺陷^[4]。伞红军等^[5]通过实验证明,Delta 机器人的结构参数对其运动性能影响显著:增大动、静平台半径差和驱动臂长度,或减小从动杆长度可改善机构性能。但这些参数之间存在复杂的非线性耦合关系,目前缺乏系统的理论指导其优化设计^[6]。

为解决此难题,研究者常将期望工作空间作为评价指标或后续轨迹规划与结构优化的基准参数。Laribi 等^[7]以长方体为期望空间指标,利用遗传算法求解满足条件的优化参数。Dastjerdi 等^[8]进一步提出了基于杆长约束的最大内接长方体工作空间求解方法。梁香宁等^[9]推导了单支链曲面方程,通过各支链曲面与最大内切球体相求交得到球形工作空间。高英儒^[10]则采用内接圆柱体作为期望工作空间。

上述方法所存在的局限在于主观选取的期望工作空间在形状、尺寸和姿态上各异,导致研究结论虽在特定条件下有效,但普适性不足。其次,易陷入局部最优解,所得工作空间容积可能满足要求,但空间位置不满足实际需求。黄海忠^[11]指出,期望空间位置的合理性是轨迹规划的前提。梁艳阳等^[12]强调 Delta 并联机器人结构参数与期望工作空间之间并非线性相关。Hong 等^[13]分析表明,杆长条件改变时,可达工作空间形状会急剧变化,边界呈现非线性畸变特性。Anvari 等^[14]进一步讨论了机械结构的影响,指出不合理参数选择会导致结构侵入可达工作空间,改变实际可达位置。

刘辛军等^[15]提出了“Delta 并联机器人最大内切工作曲面”的概念,并通过 CAD 辅助求解。该指标基于结构参数,能有效统一期望工作空间的类型选取问题,避免重复统计不可用空间,并规避不同参数导致的形状变化影响。

然而,并联机构的工作空间由多个复杂空间曲面包络而成,难以获得其代数表达式。姜铁辉^[16]交叉验证了多种现有求解方法,指出传统几何法依赖复杂的空间曲面解析建模,难以处理运动学约束(如第四轴双曲面、球

铰链转角)耦合下的边界问题。

采用蒙特卡洛法^[17]或网格扫描生成工作空间点云,再通过聚类算法^[18-19]、凸包算法^[20-21]、Alpha Shape^[17-22]或 Open CV^[23]等数值离散法提取边界,虽规避了解析建模,但精度依赖采样密度,且生成的曲线缺乏安全裕度设计,无法直接用于工程限位控制,方法调参也较为复杂。

为解决上述问题,并求解具有实际工程意义的最大内切工作曲线,本文受水平集方法^[24]中动态寻找等势面的启发,引入“工作空间密度”概念。将空间离散点集通过核密度估计(kernel density estimation, KDE)^[25]构建为连续密度场,将边界检测问题转化为密度梯度极值点追踪问题——密度场梯度的突变点即对应工作空间边界。这一转换巧妙规避了复杂曲面的显式建模需求。针对理论与工程的不同需求,设计了解析与数值方法互补的双路径求解架构。

本文第1章在现有的向量法正运动学和逆运动学解算的基础上,增加了球铰链和旋转轴约束,确保理论结果可直接映射到实际机构。第2章详细推导了密度法理论,并分别以空间点集和解算公式两条路径求解出了对应的最大内切工作曲线。第3章将理论计算结果、软件仿真结果和实验数据三者对照印证,验证了理论方法的正确性。文中所构建的求解器独立于机构参数,不依赖特定构型的运动学方程,兼具理论严谨性与工程实用性,为并联机器人尺度综合、参数优化与运动控制提供了新工具。

1 运动学解算与空间约束条件

1.1 运动学解算

本文采用向量法推导 Delta 并联机器人的运动学正逆解公式^[26-27]。机构各支链分布与坐标系设定如图1所示。

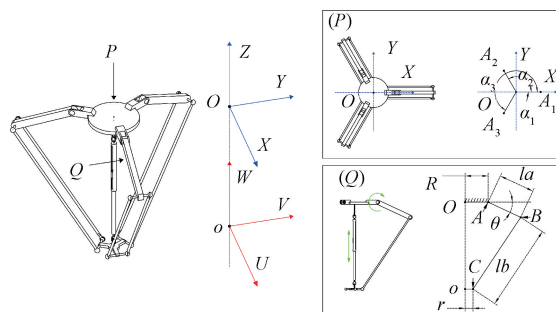


图1 Delta 并联机构及其支链简图

Fig. 1 Delta parallel mechanism and corresponding branch diagram

Delta 并联机构主要由静平台、动平台、主动臂、从动臂以及旋转关节组成。其坐标系设定为静坐标 O -XYZ 系和动坐标系 o -UVW, 两坐标系之间的变换可由平移矩阵表示。

从图 1 中 P 方向观察, 静坐标系与各支链在 XOY 平面上的投影夹角 α_i 分别为:

$$\alpha_i = \frac{2\pi}{3}(i-1), i=1,2,3 \quad (1)$$

从 Q 方向观察单条支链, Delta 机器人的关键几何参数定义如表 1 所示。

表 1 并联机构参数含义

Table 1 Meaning of parallel mechanism parameters

符号	参数意义
R	静平台半径/mm
r	动平台半径/mm
la	主动臂长/mm
lb	从动臂长/mm
θ	主动臂运动夹角/(°)

运动学正解为已知主动臂运动夹角 $\theta_i (i=1,2,3)$, 求末端执行器中心点位置 (即图 1 中 o 点) 在 O -XYZ 坐标系中的坐标 (x, y, z) 。其单条支链运动学代数式可表示为:

$$\begin{aligned} lb^2 = & \{ [r - R - la \cos(\theta_i)] \cos(\alpha_i) + x \}^2 + \\ & \{ [r - R - la \cos(\theta_i)] \sin(\alpha_i) + y \}^2 + \\ & (la \sin(\theta_i) + z)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

联立 3 条支链的约束式 (2), 可将其化简为一个关于 z 的一元二次方程。为简化计算, 设中间变量:

$$\begin{cases} k_{i1} = [r - R - la \cos(\theta_i)] \cos(\alpha_i) \\ k_{i2} = [r - R - la \cos(\theta_i)] \sin(\alpha_i) \\ k_{i3} = la \sin(\theta_i) \end{cases} \quad (3)$$

通过合并未知项系数解算公式改写为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中:

$$\begin{cases} a_1 = 2(k_{11} - k_{21}) \\ a_2 = 2(k_{11} - k_{21}) \\ b_1 = -2k_{22} \\ b_2 = -2k_{32} \\ c_1 = 2(k_{23} - k_{13}) \\ c_2 = 2(k_{33} - k_{13}) \\ d_1 = k_{23}^2 - k_{13}^2 + k_{22}^2 + k_{21}^2 - k_{11}^2 \\ d_2 = k_{33}^2 - k_{13}^2 + k_{32}^2 + k_{31}^2 - k_{11}^2 \end{cases} \quad (5)$$

当最左侧二阶矩阵可逆时, 可将其转换为更直观的代数式:

$$\begin{cases} x = f_x z + f_1 \\ y = f_y z + f_2 \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$\begin{cases} f_x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ f_y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ f_1 = \frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ f_2 = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{cases} \quad (7)$$

将式 (6) 代入式 (2) 中, 可化简为:

$$0 = Az^2 + Bz + C \quad (8)$$

式中:

$$\begin{cases} A = f_x^2 + f_y^2 + 1 \\ B = 2[(k_{11} + f_1)f_x + f_2 f_y + k_{13}] \\ C = k_{11}^2 + f_1^2 + 2k_{11}f_1 + f_2^2 + k_{13}^2 - lb^2 \end{cases} \quad (9)$$

最后得:

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (10)$$

z 有双解, 若执行器运动范围在静平台上方, 取正值, 反之取负值, 将得到的值代入到式 (6) 中可得到对应末端执行器在 O -XYZ 坐标系中的坐标。

运动学逆解为已知末端执行器坐标 (x, y, z) 求各主动臂运动夹角 $\theta_i (i=1,2,3)$, 设中间变量:

$$t_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \quad (11)$$

根据三角函数可得:

$$\begin{cases} \sin(\theta_i) = \frac{2t_i}{1+t_i^2} \\ \cos(\theta_i) = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2} \end{cases} \quad (12)$$

为简便计算, 令:

$$\begin{cases} u_i = la^2 - lb^2 + (r - R)^2 + x^2 + y^2 + z^2 + \\ \quad 2(r - R) \cos(\alpha_i)x + 2(r - R) \sin(\alpha_i)y \\ v_i = -2la(\cos(\alpha_i)x - \sin(\alpha_i)y + (r - R)) \\ w_i = 2laz \end{cases} \quad (13)$$

将式 (12) 与 (13) 代入式 (2) 中化简可得:

$$(u_i - v_i)t^2 + 2w_i t + (u_i + v_i) = 0 \quad (14)$$

最终可得单只链主动臂运动夹角公式为:

$$\theta_i = 2\arctan\left(\frac{-2w_i \pm \sqrt{(2w_i)^2 - 4(u_i - v_i)(u_i + v_i)}}{2(u_i - v_i)}\right) \quad (15)$$

由于单条支链可视作平面四杆机构的变体,在给定末端位置下,每条支链通常存在两个可能的解,因此,对于3条支链,理论上最多存在8组可能的逆解组合,其构型示意如图2所示。

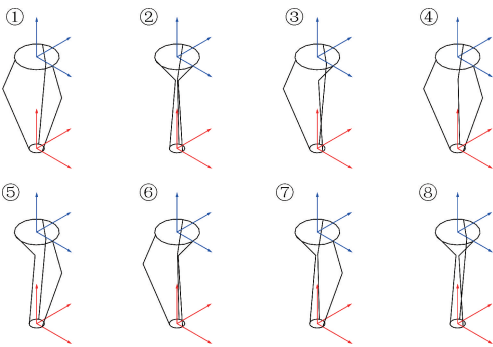


图2 逆解算的8个解组合

Fig.2 Eight combinations of solutions for inverse kinematics

在实际应用中,需结合主动臂关节转角范围、运动连续性以及避免机构干涉等约束条件筛选有效解。通常优先选取主动臂与从动杆组成的关节朝向机构外侧的构型,如图2中构型①所示。

1.2 空间约束条件

Delta机器人的运动范围不仅受限于运动学约束,还受到其机械结构的约束,主要包括第四轴和支链上球铰链的约束。

第四轴作为附加的旋转轴,其运动与动平台没有运动学的耦合,所以不用代入运动学方程中参与计算,应当只作为活动空间的约束条件。

第四轴约束的几何关系如图3所示。第四轴具有绕其自身轴线旋转和沿轴线移动两个自由度。由于机械结构限制,其运动会在空间中被动生成两个约束曲面。末端执行器的运动轨迹必须始终位于两个约束曲面所夹的可活动空间内。完整的机器人工作空间,应当是由运动学公式推导出的空间范围和第四轴的双曲面夹层所围成的空间交集。

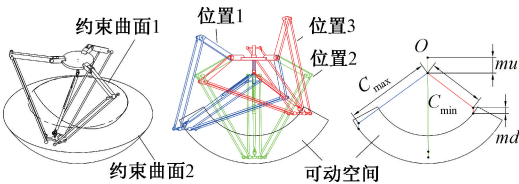


图3 第四轴空间约束图解

Fig.3 Spatial constrains diagram for the fourth axis

图3中的第四轴约束的参数含义如表2所示。

表2 第四轴约束的参数含义

Table 2 Meaning of constraint parameters for the fourth axis

代号	参数含义
$C_{\max}$	第四轴最大伸缩上下万向节中心距/mm
$C_{\min}$	第四轴无伸缩上下万向节中心距/mm
μ	静系原点上至万向节中心距/mm
md	动系原点上至下万向节中心距/mm

两空间曲面的表达式可写为:

$$\begin{cases} (z - \mu - md)^2 + x^2 + y^2 = C_{\min}^2 \\ (z - \mu - md)^2 + x^2 + y^2 = C_{\max}^2 \end{cases} \quad (16)$$

由于Delta机构的动静平台相对位置可做交换,不同相对关系直接体现为动平台坐标值 z 的大小,若动平台在静平台下方则取负值,由于表2中的参数均为标量,其约束条件为:

$$C_{\min} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + (z + md + \mu)^2} \leq C_{\max} \quad (17)$$

同理,若动平台在静平台上方则取正值,其约束条件应为:

$$C_{\min} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + (z - md - \mu)^2} \leq C_{\max} \quad (18)$$

球铰链主要应用于主动臂和从动臂以及从动臂与下方动平台处的连接,以构成一个平行四边形来保证动坐标系 UoV 平面在运动过程中始终和静坐标系 XOY 平面相平行。

针对单一支链上的球铰链约束做分析,主动臂与静平台坐标系原点所构成的平面如图4所示,并且不同支链构成的平面之间不会互相干涉。关节连接处的单个球铰在假定的 Q 坐标系下有着绕 $\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{j}$ 这3个方向旋转的自由度。若单个球铰头单侧的旋转自由角度最大值为 φ ,由于主动臂平行四边形的特性,其活动角度范围则为 2φ 。

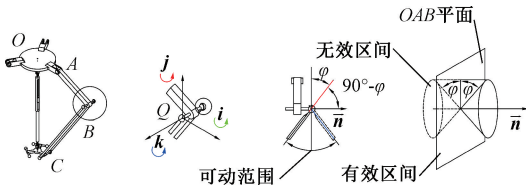


图4 球铰链空间约束图解

Fig.4 Spatial constraints diagram for ball hinges

设平面 OAB 的法向量为 $\vec{n}$,则从动臂极限位置下和法向量夹角为 $(90 - \varphi)^\circ$ 。其在空间中的表现形式如图4所示,会围绕向量 $\vec{n}$ 生成一个形似悠悠球的无效空间。

各支链的向量表达式可写为:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA_i} = \begin{pmatrix} R\cos(\alpha_i) \\ R\sin(\alpha_i) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{A_iB_i} = \begin{pmatrix} l\cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) \\ l\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) \\ -l\sin(\theta_i) \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{B_iC_i} = \begin{pmatrix} (r-R-l\cos(\theta_i))\cos(\alpha_i) + x \\ (r-R-l\cos(\theta_i))\sin(\alpha_i) + y \\ l\sin(\theta_i) + z \end{pmatrix} \end{cases} \quad (19)$$

其中,由 OA_iB_i 构成的平面法向量为:

$$\vec{n}_i = \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{A_iB_i} \quad (20)$$

由反三角函数和向量点积的性质可得:

$$\angle(\vec{n}, \overrightarrow{B_iC_i}) = \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{B_iC_i}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{B_iC_i}|}\right) \quad (21)$$

所求得夹角 $\angle(\vec{n}, \overrightarrow{B_iC_i})$ 为法向量和从动杆向量之间的夹角,若从动臂向量处于图4中的无效区间。其约束条件为:法向量与从动杆向量之间的夹角应当 $>(90-\varphi)^\circ$ 且 $<(90+\varphi)^\circ$,表达式可写为:

$$90^\circ - \varphi \leq \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{B_iC_i}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{B_iC_i}|}\right) \leq 90^\circ + \varphi \quad (22)$$

综上所述,代入第四轴约束和球铰约束的完整运动学解算公式为:

$$\begin{cases} lb^2 = \{[r-R-la \cdot \cos(\theta_i)] \cdot \cos(\alpha_i) + x\}^2 + \\ \{[r-R-la \cdot \cos(\theta_i)] \cdot \sin(\alpha_i) + y\}^2 + \\ (la \cdot \sin(\theta_i) + z)^2 \\ C_{\min} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + (z + md + mu)^2} \leq C_{\max} \\ 90^\circ - \varphi \leq \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{B_iC_i}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{B_iC_i}|}\right) \leq 90^\circ + \varphi \end{cases} \quad (23)$$

2 密度法理论和实践方法

2.1 密度法理论基础

基于前文推导的运动学公式,通过限制主动臂运动范围与步长,遍历主动臂关节角度即可生成一系列离散空间点^[28]。如图5所示,这些点集可初步表达出机器人可达工作空间的形貌与位置。

不难看出,Delta机器人的可达工作空间是由多个复杂空间曲面包络而成的近似纺锤体。在引入工程约束

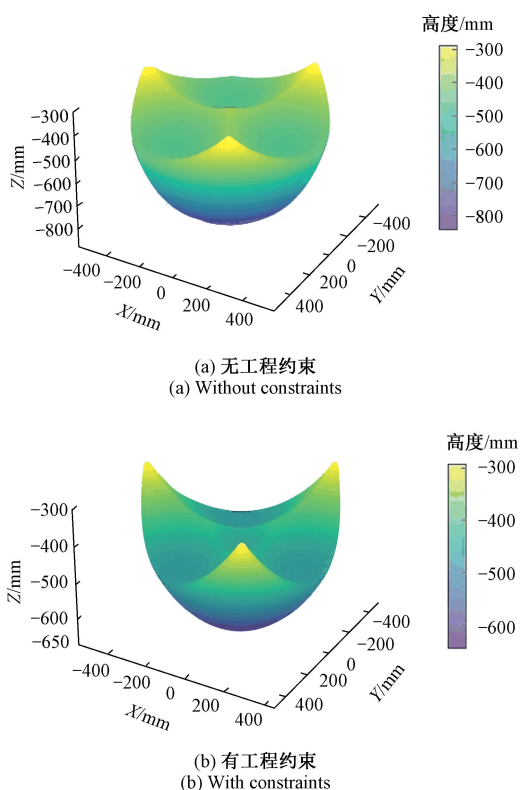


图5 Delta机器人工作空间示意图

Fig. 5 Schematic diagram of Delta robot workspace

后,实际可达空间将进一步被压缩。

Delta机器人的运动控制普遍采用基于末端工作空间的规划策略^[29-30]。先在工作空间中规划出期望轨迹,再通过逆运动学求解驱动关节的转动角度^[31-34]。这就要求在机器人的可达工作空间内界定出一个安全且连续的运动子空间——即安全走廊。由此可引申出一个实际问题:安全走廊的边界应当如何确定。

从空间利用率最大化的角度出发,最理想的方式是直接求取可达工作空间的包络曲面。然而如前文所述,可达工作空间的边界由运动学方程与多重工程约束隐式表达,无法用简洁的解析式描述,传统几何包络与数值搜索方法难以兼顾精度与效率。

为此,本文基于最大内切工作面理论,提出一种密度法(density method)用于求解工作空间的最大内切曲线。该方法将边界检测视为一种隐式水平集过程(implicit level set process):通过空间点集构建连续密度场,将边界识别转化为对密度梯度极值点的探测,从而隐式确定最大内切边界。与水平集方法类似,边界由密度场的突变自然形成,无需直接求解曲面方程,也无需依赖人工参数设置。

基于上述思路,为了更好地解释密度法的理论基础,可建立如下理论模型:将Delta机器人的可达空间延Z轴

切开,在单层工作空间平面上构建一个密度场。

工作空间本身并不具备“密度”这一属性,密度法的核心步骤为在工作空间边界内外,构建均匀的密度场,如图6所示。

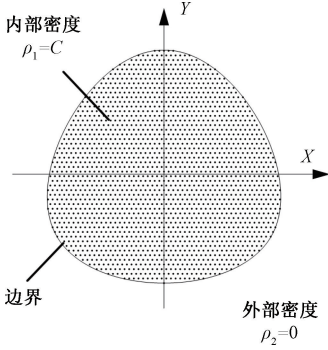


图6 单层切片上的密度场

Fig. 6 Density filed on single layer slice

边界内部区域是点云存在的区域,因此密度场可构建为:

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = C \quad (C \subset N) \quad (24)$$

其中, $\mathbf{r}$ 是描述空间中任意一点坐标的位置矢量,在本文构建的笛卡尔坐标系下, $\mathbf{r}$ 应当表示为:

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (25)$$

由于所构建的密度场是静态的,时间变量 t 在此项可忽略。而在边界外侧区域不存在点云,故其密度场可构建为:

$$\rho_2(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (26)$$

最大内切曲面的求解问题,映射到单层切片上可被转换为最大内切圆的求解问题。

如图7所示,假设此单一平面上有若干个以单层切片的形心为圆心,半径以等差 Δr 增长的圆,不断向边界逼近。

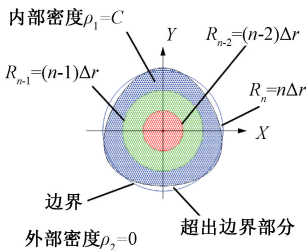


图7 圆对边界的逼近

Fig. 7 The boundary approximation with the circle

以离散的形式,可将第 n 个圆与第 $n-1$ 个圆围成的圆环的面积可表示为:

$$S_n = (2n - 1) \pi (\Delta r)^2 \quad (27)$$

此时该圆环所承载的质量为:

$$M_n = \iint_{s_n} \rho dS = (2n - 1) (\Delta r)^2 \pi \rho, n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

当圆环始终处于边界内时,其密度系数 $\rho = \rho_1 = C$,相邻两环的环质量之差始终为:

$$\Delta M = (M_n - M_{n-1}) = 2\pi (\Delta r)^2 \rho_1 \quad (29)$$

则环质量随圆环半径增长的变化率为:

$$\dot{M}_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{\Delta r} = 2\pi \rho_1 \Delta r \quad (30)$$

上述参数均为常数,说明在边界内环质量与环半径的关系是成正比的。

而当围成的圆环突破了边界后,此时圆环所承载的质量就变为了:

$$M_n = [(2n - 1) (\Delta r)^2 \pi - S] \rho_1 \quad (31)$$

其中, S 为环超出边界部分的面积,边界形状与当前圆环的相交关系决定。

此时相邻环的质量之差为:

$$\Delta M = (2\pi (\Delta r)^2 - S) \rho_1 \quad (32)$$

此时的变化率为:

$$\dot{M}_n = 2\pi \rho_1 \Delta r - \left(\frac{S}{\Delta r} \right) \rho_1 \quad (33)$$

其含义为,随着环越过边界,超出边界部分的面积 S 不断增大,环质量增长的趋势将会减缓。

当 Δr 趋近于无穷小时,相邻环质量差与半径增量的比值(变化率)将无限趋近于连续导数:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta r} = f(r) = \frac{dM(r)}{dr} \quad (34)$$

其物理意义可表示为,密度在径向位置上的分布函数。

而连续导数初次下降的点(极大值点)所对应的半径即为此层切片上的最大内切圆半径,因此单层切片上最大内切圆的判别条件以离散的方式可写为:

$$\left. \frac{\Delta M}{\Delta r} \right|_{r=R_{\max}^-} > \left. \frac{\Delta M}{\Delta r} \right|_{r=R_{\max}^+} \quad (35)$$

或以连续的方式写为:

$$R_{\max} = \operatorname{argmax}_r f(r) \quad (36)$$

综上所述,密度法求解最大内切圆半径的推导流程如图8所示。

其核心思想可归纳为以下逻辑链条:1)以空间点云的自然分布情况,构建出连续的密度场;2)确定半径增量,并以形心为圆心,逐步增大半径,使得圆不断向密度突变的边界逼近;3)通过比较相邻圆环的质量差变化趋势,判别半径的增长是否达到边界,并以此为条件求出其中的最大内切圆半径。

2.2 基于空间点集的密度法应用

2.1节中对密度法理论的分析为边界判别提供了准则。在实际求解中为实现数值计算,需要将其离散化。

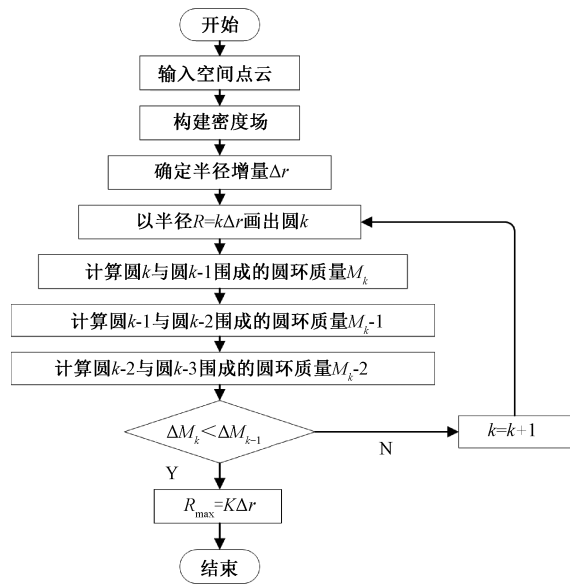


图 8 密度法推导流程

Fig. 8 Derivation process of density method

根据对密度场的构建方式不同,本文衍生处两类实现方法,它们共享同一判别逻辑,但数据基础不同。

文中计算与实验所使用的 Delta 机器人关键结构参数详见表 3。

表 3 Delta 机器人参数表
Table 3 Delta robot parameter table

代号	值	含义
R	160 mm	静平台半径
r	55 mm	动平台半径
la	250 mm	主动臂长
lb	600 mm	从动臂长
μ	94.5 mm	静系原点至上万向节中心距
md	34.5 mm	动系原点至下万向节中心距
$C_{\max}$	528.234 mm	第四轴最大伸缩量
$C_{\min}$	354.709 mm	第四轴无伸缩量
φ	50°	球铰链最大允许偏转角

基于离散点云的统计方法(以下简称点集法),其本质是用规则采样的离散点集来模拟连续密度场通过统计点在不同半径环内的分布变化来探测梯度突变点,基于空间离散点云的求解法如图 9 所示。

首先,在静坐标系下生成一个覆盖理论可达空间的均匀分布点云。随后,再将得到的空间点代入到运动学解算公式中进行可达性判断,进而筛选出一个以规则排列点云表达的可达工作空间模型。

此可达工作空间模型可轻易的划分为若干个不同

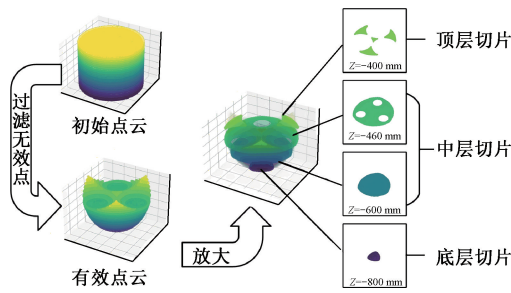


图 9 点集法求解流程

Fig. 9 Solution flow of point set method

Z 轴高度上的点云切片。而各层切片都是使用运动学公式约束筛选得到,也就天然地生成了不同高度下的密度场分布边界。在单层平面上,有效点的集合在平面构建出了如图 6 所示的密度场。由于此时密度场以离散点的形式被表示,因此单层切片中的每个点,都可被视作为此点邻域上的质量集合体。

由于最大内切曲面在单层切片上体现为最大内切圆,也就表示本文只关心半径方向上的分布情况,因此单层切片上的空间点可通过计算其与形心点的阿基米德距离,实现数据降维,从而得到分布在半径方向上的点的集合,此集合可表示为:

$$N_i = [r_1, r_2, \dots, r_i], i = 1, 2, \dots, n \tag{37}$$

其中, r_i 为二维点降维在半径方向上分布的点离原点的间距。

根据此点集,可得到离散的点在半径方向上的分布,但为了精确的寻找出密度梯度变化点以确定边界,本文使用核密度估计的方式将离散分布的点集转换为平滑且连续的概率密度函数。核密度估计的理论图解如图 10 所示。

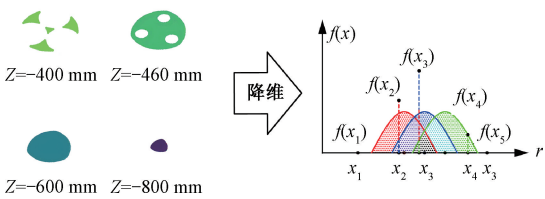


图 10 数据体切片与核密度估计

Fig. 10 Volumetric slice and KDE

核密度估计求解连续分布函数的思路为:由于单个离散点 r_i 被视为其邻域的质量集合体,那么亦可将此点所承载的质量以一定分布形式分散到其邻域内。

如图 10 所示,每个样本点 r_i 像一个路灯,其灯光覆盖一定范围。若多个路灯相距较近,其灯光重叠区域的亮度就更高。具体计算时,针对区域点 x_i ,计算所有样本点 r_i 对该位置的“辐射贡献”,所有样本点的辐射值相加后归一化,即可得到此处的密度函数值 $f(x_i)$ 。即如果说

此点周围的点较多,如图 10 中点 x_3 处,那么得到的函数值 $f(x_3)$ 在此处的值更大,反之则更小。

完整的核密度估计函数表达式为:

$$f(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-r_i}{h} \right)^2} \right] \quad (38)$$

其中, h 为带宽,体现单个样本点对邻域的辐照范围, n 为点集中的样本点个数, r_i 为样本点的位置。

此时前文中提到的最大内切圆半径的判别条件,可直接转换为寻找此分布函数上一阶导数为零且二阶导数为负的极大值点。

该分布函数一阶导数为:

$$f'(x) = -\frac{1}{nh^2 \sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x-r_i}{h} \right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-r_i}{h} \right)^2} \quad (39)$$

分布函数二阶导数为:

$$f''(x) = \frac{1}{nh^3 \sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x-r_i}{h} \right)^2 - 1 \right] e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-r_i}{h} \right)^2} \quad (40)$$

上式中的带宽 h 作为唯一参数,直接影响连续分布函数的平滑效果^[35]。比较容易理解的是,若单个样本点 r_i 的带宽过小,相邻样本点之间会存在均不被左右两侧辐照的位置,在函数曲线上直接表现为曲线有多个“毛刺”,无法准确判别极值点。若带宽选择过大,则曲线将被过度平滑,密度变化趋势不会很明显,对于部分样本点较少的区域,极值点位置往往会偏大。因此本文使用 Scott 规则 (Scott's normal reference rule), 根据样本点集自适应选择带宽,其公式为:

$$h = \sigma(n^{-1/5}) \quad (41)$$

其中, σ 为样本标准差, n 为样本点个数。标准差越大代表样本分布范围越广,带宽取值应当越大,但随着样本点个数 n 的增加,数据点之间变得更加密集,就需要减小带宽以避免过渡平滑。式(41)将数据的离散程度和样本量结合起来,提供了一个随数据自适应变化的带宽。

为定量分析带宽 h 对最大内切圆半径求解结果的影响,选取图 10 中的 $Z = -460$ mm 高度下的单层数据体切片作为数据样本。

设置标准带宽 $h_1 = \sigma(n^{-1/5})$, 小带宽 $h_2 = 0.1 h_1$ 和大带宽 $h_3 = 10 h_1$, 进行对比实验。3 种带宽下估计得到的径向密度函数曲线如图 11 所示。

同前文理论分析结果相同。小带宽得到的密度曲线存在多个毛刺,在小尺度上存在多个假峰,无法通过求极值点的方式求得最大内切圆半径。大带宽得到的曲线过于平滑,直接消除了样本本身存在的局部密度变化趋势,所求得的极值点,并不是真实的最大内切圆半径。标准带宽下,密度曲线在保持整体平滑的同时有效体现了样本在小尺度下的变化趋势,可以得到准确的极大内切

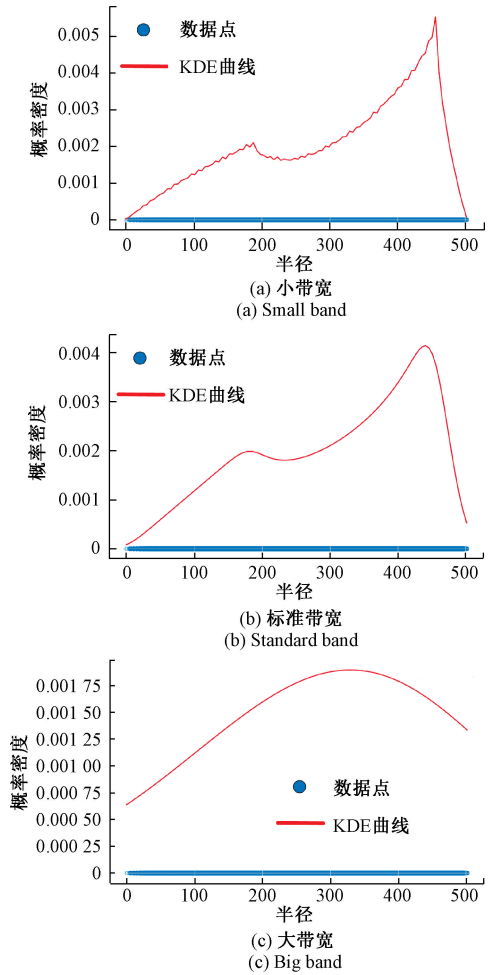


图 11 不同带宽下的径向密度曲线

Fig. 11 Radial density curve for different bandwidths

圆半径。从图 11(b) 中,可观察到其密度分布曲线有两个极大值其原因是,数据样本的分布受 Delta 机器人的机械结构限制,不同高度下的切片点集分布形态各异,其对应的 KDE 曲线如图 12 所示,可大体可分为 3 类:1) 底层切片内部点均匀分布,函数曲线呈现单峰趋势;2) 中层切片由于结构特性切片内部存在孔洞,其函数呈现双峰;3) 顶层切片切片上的点不再连续,点云与点云极值存在真空带,因此函数呈现明显的双峰。

上中下各层的取值范围不同,对于单峰曲线,选取其唯一峰值点对应的半径,对于双峰曲线,选取内侧半径较小处峰值点对应的半径。通过整合不同层对应的边界半径,可以得到一条与 Z 高度对应的极大半径内切曲线。

为探究点分布模式对最终得到的最大内切曲线的影响,在点集生成阶段采用了两种不同的生成方式:1) 蜂巢分布:相邻点间距绝对相等;2) 正方形分布: X 和 Y 方向均匀分布,如图 13 所示。

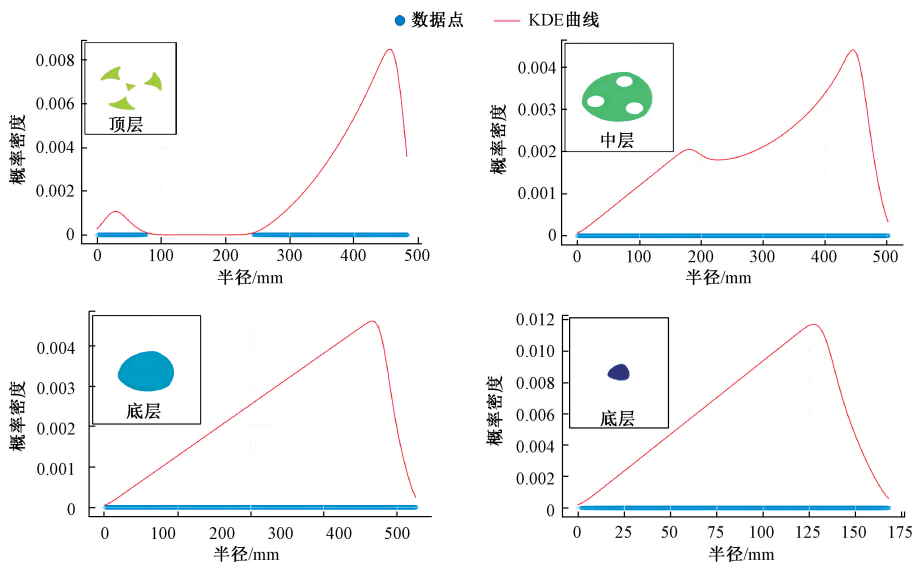


图 12 不同单层切片的密度曲线
Fig. 12 Density curves of different single-layer slices

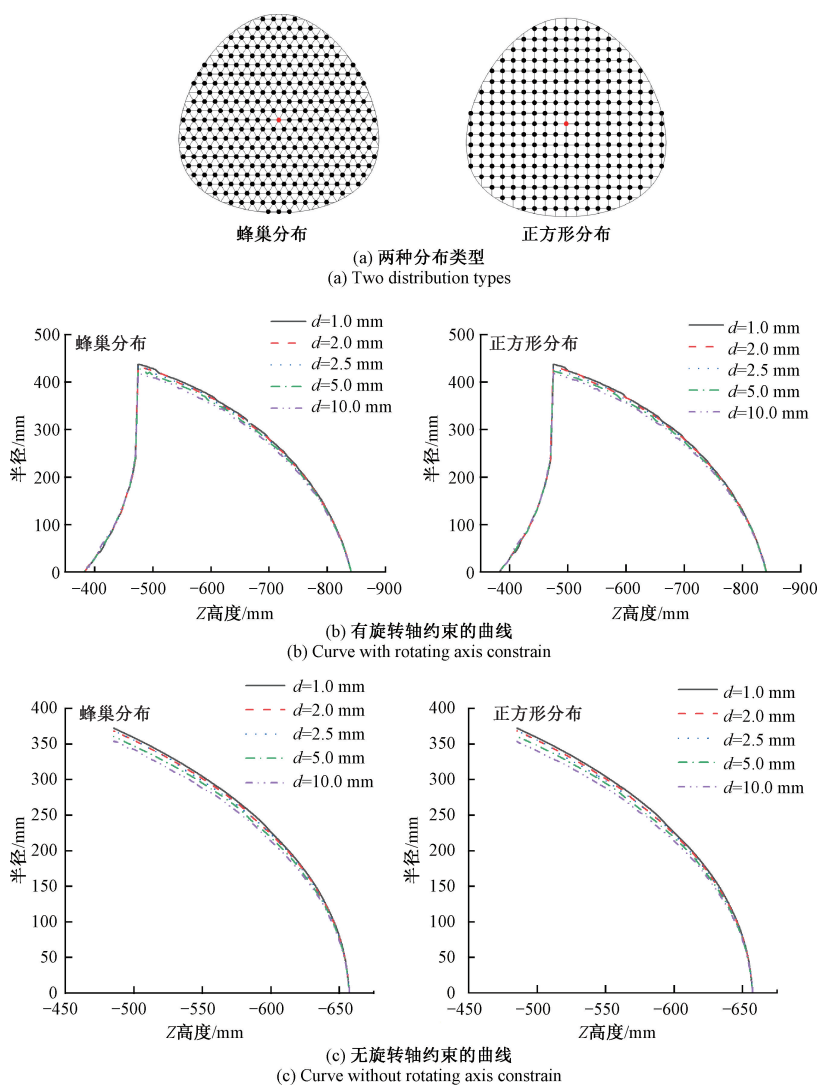


图 13 点集法曲线(无第四轴约束)
Fig. 13 Point set method curve (without fourth axis constraint)

图 13 中 d 表示点与点之间的最小分布距离(对于正方形分布, d 即正方形边长;对于蜂巢分布, d 为正六边形边长)。

针对常见的两种不同的常见 Delta 构型(有无第四轴)。考虑不同点分布类型和不同边长带来的影响,共作出如图 13 中共 20 条不同的最大内切工作曲线。

表 4 和 5 分别展示了无第四轴约束下和有第四轴约束下,不同点间距 d 和分布模式得到的最大内切工作曲线展开成曲面后的容积及使用的总点数。

表 4 点集求解曲线结果(无第四轴约束)
Table 4 Point set solution curve result (without fourth axis constraint)

点间距/ mm	蜂巢分布		正方形分布	
	容积/L	点数	容积/L	点数
$d=1.0$	120.488	37 815 062	120.161	32 749 090
$d=2.0$	118.403	9 453 649	118.227	8 187 344
$d=2.5$	117.619	6 050 316	117.208	5 239 633
$d=5.0$	114.825	1 512 537	114.363	1 309 782
$d=10.0$	111.475	378 209	111.195	327 447

表 5 点集求解曲线结果(有第四轴约束)
Table 5 Point set solution curve result (with fourth axis constraint)

点间距/ mm	蜂巢分布		正方形分布	
	容积/L	点数	容积/L	点数
$d=1.0$	39.862	15 671 435	39.842	13 571 951
$d=2.0$	38.956	3 918 046	38.861	3 392 841
$d=2.5$	38.620	2 507 361	38.441	2 171 476
$d=5.0$	37.279	626 757	37.179	542 814
$d=10.0$	35.756	156 704	35.587	135 702

综合图 13 和表 4、5 的数据分析得:

- 1) 相同分布模式下,点间距 d 越小,计算得到的容积越大,曲线更接近真实工作空间容积;
- 2) 在相同点间距 d 下,蜂巢分布比正方形分布需要更多点数(约多 15%),但获得的容积差异极小约 0.05%。正方形分布具有更高的点利用效率;
- 3) 综合考虑计算精度和效率,选用 $d=1\text{ mm}$ 步长下的正方形分布结果作为点集求解法的代表曲线。

2.3 基于运动学公式的密度法应用

基于运动学方程解算的方法(以下简称公式法),此方法的本质是直接在连续域利用运动学方程判断点是否可达。它通过计算虚拟圆周上有效点的比例变化来模拟“环质量”梯度,从而探测边界,公式法理论图解如图 14 所示。

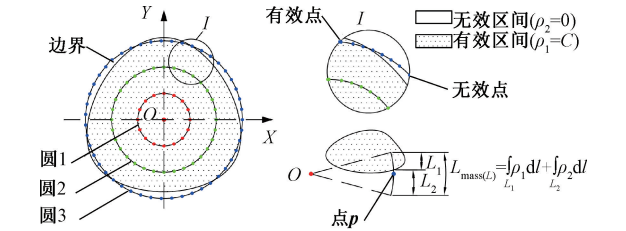


图 14 公式法图解
Fig. 14 Diagram of formula method

该方法的核心思想是直接在二维切片上模拟密度场中环形的质量计算:

如图 14 所示,对于给定高度 Z 和半径 r 的圆,在圆周上以固定角度步长均匀生成若干个点。理论上的环质量可以直接表示为圆周上的线积分:

M(r) = \oint_{C(r)} \rho(p) ds (42)

其中, $C(r)$ 是半径为 r 的圆周, $\rho(p)$ 是该点处的密度。当圆周 $C(r)$ 始终处于有效区间内时,其质量 $M(r)$ 正比与周长 $2\pi r$ 。

圆周 $C(r)$ 触及工作空间边界时,圆周上部分点将位于无效区间。此时 $M(r)$ 不再与 r 成简单正比关系,而会呈现出先增后减的趋势。

由于直接计算式(42)积分和精确判定边界穿越点比较困难,则使用离散化的方法计算圆周上每个采样点 p 是否满足运动学约束,如图中的线段 L 分别由两段线段 L_1 、 L_2 组成,其线段质量应当为:

mass(L) = \int_{L1} \rho_1 dl + \int_{L2} \rho_2 dl (43)

由于点 p 作为线段邻域的质量承载体,线段 L 的质量可被离散替代为:

mass(L) = L \cdot \rho(p) (44)

进一步推广到整个圆环,设总点数 $N_{\{all\}}(r)$ 直接统计在有效区间内的点个数 $N_{\{valid\}}(r)$, 定义离散化的“环质量”为:

M(r) \approx \frac{N_{\{valid\}}(r)}{N_{\{all\}}(r)} \cdot 2\pi r \cdot \rho_1 (45)

在离散化的 $M(r)$ 曲线上寻找其梯度发生显著下降的临界点 r , 即对应最大内切圆半径:

R_{max}(Z_k) = \operatorname{argmax}_r \left| \frac{\Delta M(r)}{\Delta r} \right| (46)

将点集法($d=1\text{ mm}$, 正方形分布)与解析公式法求得的最大内切工作曲线进行对比,结果如图 15 和表 6 所示。

结合图 15 和表 6 中的数据分析可得出结论,点集法求得的容积小于解析公式法求得的容积,差异约为 4.4%~8.6%。

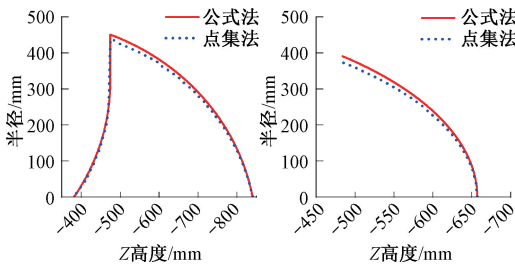


图 15 公式法与点集法结果对比

Fig. 15 The formula method and point set method results comparison

表 6 点集法与公式法曲线参数对比

Table 6 Curve parameters comparison between point set method and formula method

类型	点集法容积	公式法容积	容积比值
无第四轴	120. 161 L	125. 689 L	95. 60%
有第四轴	39. 842 L	43. 716 L	91. 14%
利用率	33. 16%	34. 80%	—

其原因在于密度法理论构建的是统计意义上均匀连续的密度场。点集法使用的离散点云虽然具有工程对称性和规律性,但无法完美体现这种统计均匀性^[36]。

如图 16 所示,随着采样点密度增加,伪边界逐渐逼近真实边界。反映到最大内切曲线上即为,同一分布条件下,点密度越高得到的曲线展开容积就越大。两种求解方法相比较,点集法反映的是基于当前采样密度下的伪边界内切空间,而解析公式法更接近理论上的真实最大内切空间。

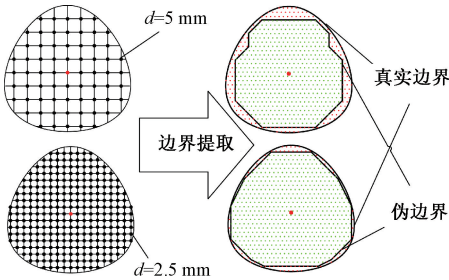


图 16 离散点集对真实边界的统计逼近

Fig. 16 Statistical approximation of real boundary by discrete point set

点集法得到的略小的容积并非纯粹的缺点。如图 16 所示,点集法曲线在靠近水平面外围保留了更多空间。这些区域恰好位于 Delta 并联机器人主要的活动范围。其缺失的部分空间,天然地提供了宝贵的工程安全裕度,在接近其运动学奇异点时,进行轨迹调整和纠偏,可作为机器人运动控制中的缓冲地带。点集法求解得到

的最大内切工作曲线适合于实际工程应用,可直接作为末端执行器运动范围的安全限位边界。

而公式法作为更加精确的计算方式,则可为 Delta 机构运动学尺度综合计算最大内切工作曲线时提供简便可靠的工具。

3 仿真与实验

为验证密度法求解最大内切工作曲线的有效性,本文采用理论计算、仿真分析和物理实验 3 个环节进行相互印证。从求解得到的 4 条最大内切曲线中,选取 3 个代表性高度($Z = -500$ mm, $Z = -550$ mm, $Z = -600$ mm),并记录各高度下对应的最大内切半径,具体数据详见表 7。

表 7 仿真与实验参数选取

Table 7 Selection of simulation and experimental parameters (mm)

Z 高度	有约束		无约束	
	点集法	公式法	点集法	公式法
-500	358. 997	376. 000	424. 102	440. 000
-550	304. 645	319. 000	400. 846	414. 000
-600	225. 957	239. 000	367. 615	382. 000

在仿真环节,限制主动臂运动角度范围为 $\alpha_i \in (-30^\circ \sim 90^\circ)$ 。设定末端执行器完成一个完整圆周运动的周期为 10 s,运动轨迹离散化为 500 个步长点在运动过程中,当末端执行器每转过一个角度增量时,计算当前位置下 3 个主动臂对应的关节角度 α_i 。

使用 Adams 软件进行逆向运动学仿真。将 Delta 机器人模型导入 Adams,并按表 7 内容设定不同高度和半径的圆周运动轨迹参数及初始值。仿真时间为 10 s,运动步长为 500,与理论计算保持一致。仿真结果与理论计算数据的对比如表 8 所示。

偏差均值指在整个圆周运动过程中,3 个主动臂在每个离散时间步的理论计算角度与 Adams 仿真角度之差的绝对值的平均值。以 $Z = -500$ mm,半径 $r = 358.997$ mm 为例,图 17 展示了该条件下 3 条主动臂的理论运动轨迹与仿真结果的对比。

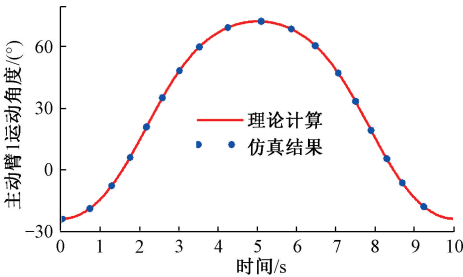
图 17(a)~(c)中 3 条主动臂的运动角度轨迹。所有曲线均在设定的主动臂关节角度限制范围内。

图 17(d)~(f)为同一时刻下理论计算角度与仿真角度的偏差曲线。偏差均值极低,最大偏差值约为 $5 \times 10^{-6}^\circ$ 。表 8 和图 17 的结果表明,理论计算与 Adams 仿真结果高度一致,偏差均值在 $10^{-7}^\circ \sim 10^{-8}^\circ$ 量级,远低于工程应用的精度要求。因此后续直接使用高可信度的仿真结果与实验结果进行对比。

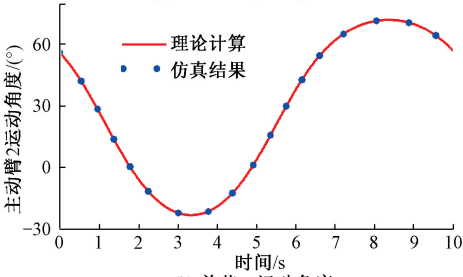
表 8 理论计算与仿真的对比结果

Table 8 Comparison results between theoretical calculations and simulations

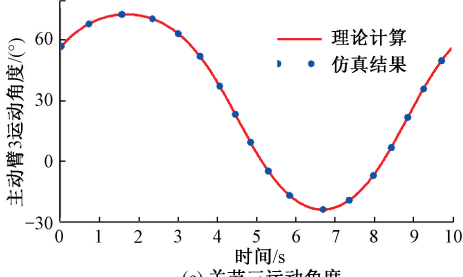
Z 高度/ mm	半径/ mm	最大角度/ (°)	最小角度/ (°)	偏差均值/ (°)
-500	358.997	72.331 522	-23.451 437	$1.684\ 23\times10^{-7}$
	376.000	75.896 636	-23.223 393	$5.547\ 57\times10^{-8}$
	424.102	86.308 677	-21.991 085	$1.218\ 36\times10^{-7}$
	440.000	89.900 272	-21.401 348	$2.685\ 3\times10^{-8}$
-550	304.645	66.942 162	-11.130 259	$1.968\ 77\times10^{-7}$
	319.000	69.779 345	-11.348 065	$-5.048\ 57\times10^{-8}$
	400.846	86.891 590	-11.039 803	$1.574\ 45\times10^{-7}$
	414.000	89.859 179	-10.752 440	$7.916\ 57\times10^{-8}$
-600	225.957	59.021 377	3.200 131	$2.860\ 94\times10^{-8}$
	239.000	61.356 561	2.583 933	$1.217\ 56\times10^{-7}$
	367.615	86.692 225	0.030 540	$2.227\ 54\times10^{-8}$
	382.000	89.922 283	0.139 450	$4.031\ 94\times10^{-8}$



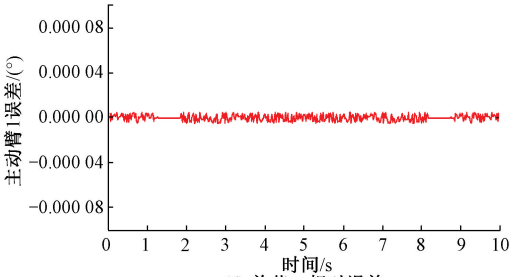
(a) 关节一运动角度
(a) Motion angle of joint one



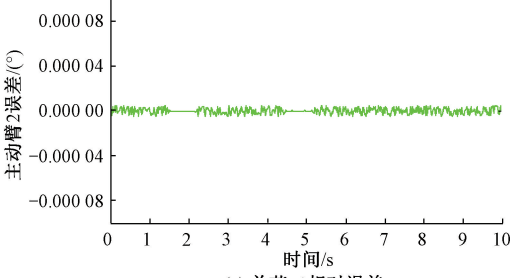
(b) 关节二运动角度
(b) Motion angle of joint two



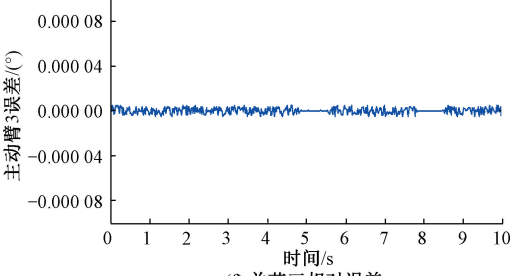
(c) 关节三运动角度
(c) Motion angle of joint three



(d) 关节一相对误差
(d) Relative error of joint one



(e) 关节二相对误差
(e) Relative error of joint two



(f) 关节三相对误差
(f) Relative error of joint three

图 17 Z=-500 mm 高度下理论与仿真主动臂运动对比
Fig. 17 The theoretical and simulated active arm movements comparison at a height of Z=-500 mm

实验平台实物如图 18 所示。

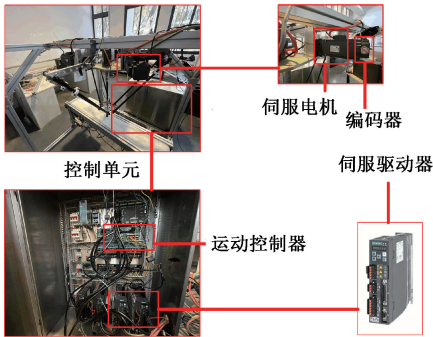
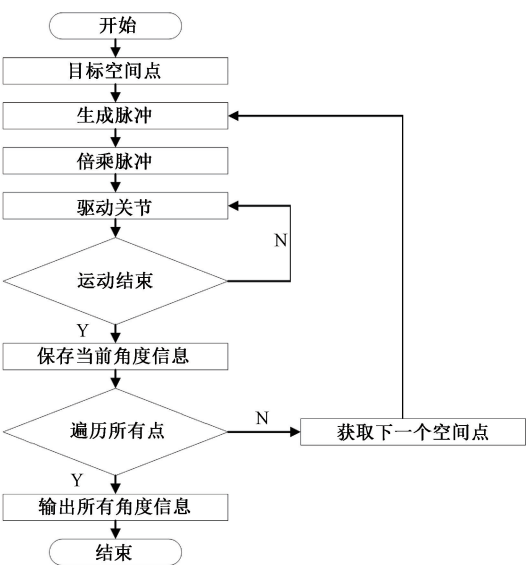


图 18 实验平台实物

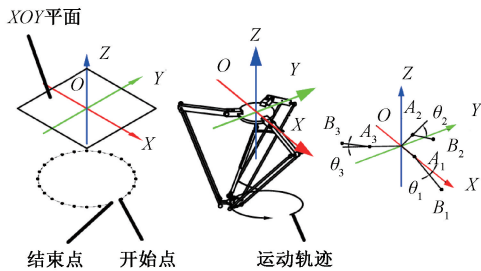
Fig. 18 Physical experimental platform

实验平台的硬件配置的型号如下,运动控制器: Zmotion 406R;伺服驱动器: SIEMENS V90 PTI;伺服电机: SIEMENS 1FL6;伺服编码器: SIEMENS 32 位绝对值

编码器。实验平台杆长以及工程约束等结构参数与表 3 保持一致。具体实验流程及可视化如图 19 所示。



(a) 实验流程
(a) Experimental flow chart



(b) 可视化
(b) visualization

图 19 实验流程

Fig. 19 Experimental flow

图 19(a) 表述了完整的实验流程,实验开始时,机器人 3 个主动臂均位于 XOY 平面 ($\alpha_i = 0^\circ$)。

上位机根据目标高度 Z 和对应的最大内切半径 r ,生成该高度平面上半径为 r 的圆周轨迹。该圆周被离散化为 500 个等距空间点。将连续的圆弧插补运动转换为点到点的直线插补运动指令序列,以精确匹配仿真步长,便于后续对比。

运动指令发送至运动控制器,经伺服驱动器放大后驱动伺服电机。电机内置编码器实时反馈位置信息,形成闭环控制。在每段直线插补运动指令执行完毕后,运动控制器读取并存储当前 3 个主动臂的关节角度值到内部寄存器。

所有运动指令执行完成后,控制器将存储的完整角度数据发送回上位机。

图 19(b) 将实验流程可视化,直观展示了实验执行

与数据采集的关键节点,在每一个运动节点完成后采集到的 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 即为所需要的数据。

由于点集法求得的半径在同高度下小于公式法结果,若公式法求得的半径对应的运动轨迹能被安全执行,则点集法对应的更小半径轨迹必定安全。因此,实验仅采集了公式法对应的半径轨迹数据。

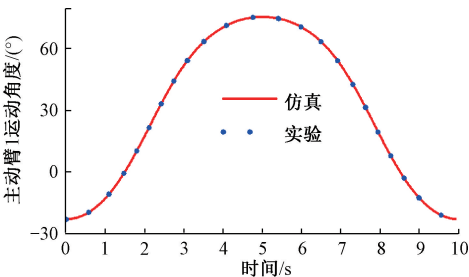
为确保实验数据与仿真数据在离散点上一一对应,实验步长同样设置为 500 点。考虑到 MODBUS 总线通信存在响应延迟,难以瞬时精确读取角度信息,采用在每个直线插补段终点停顿并读取角度的策略,以保证采集数据的准确性。

实验采集到的 6 条空间曲线的主动臂角度数据与对应的 Adams 仿真结果对比如表 9 和图 20 所示。

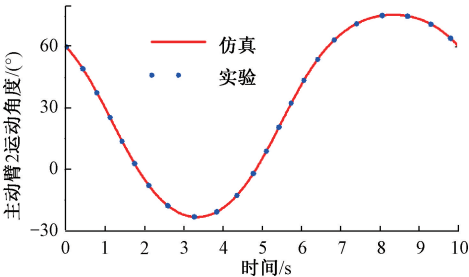
表 9 仿真结果与实验结果的对比

Table 9 Comparison between simulation results and experimental results

Z 高度/ mm	半径/ mm	最大角度/ ($^\circ$)	最小角度/ ($^\circ$)	偏差均值/ ($^\circ$)
-500	376	75.901 978	-23.226 387	0.004 217 136
	440	89.914 955	-21.398 909	0.006 730 888
-550	319	69.783 295	-11.340 783	0.003 907 984
	414	89.869 469	-10.740 275	0.007 702 124
-600	239	61.361 210	2.581 316	0.002 955 747
	382	89.943 382	0.138 978	0.007 392 459



(a) 关节一运动角度
(a) Motion angle of joint one



(b) 关节二运动角度
(b) Motion angle of joint two

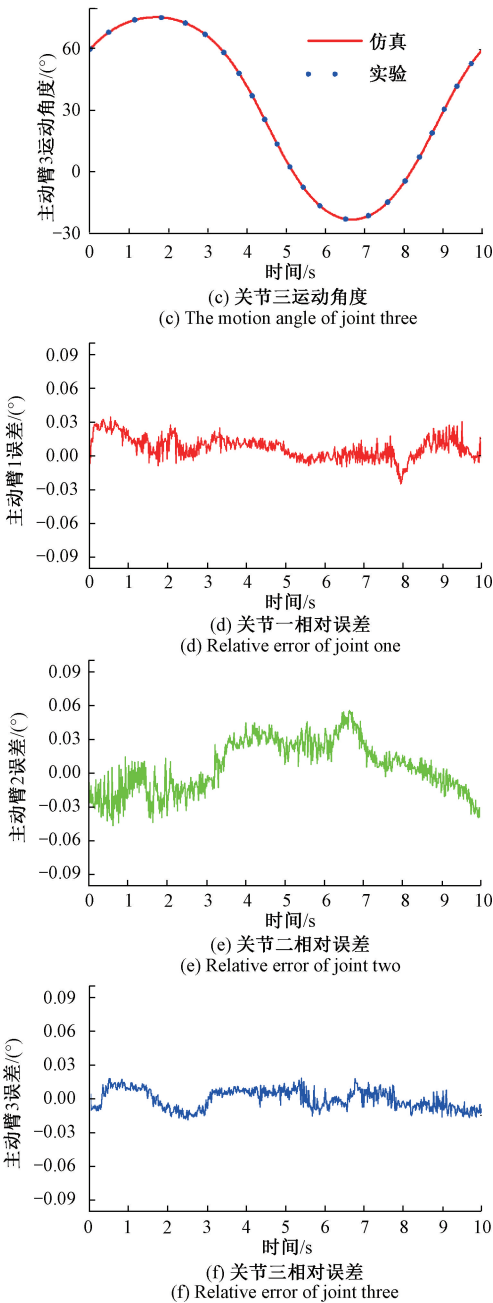


图 20 $Z=-500\text{ mm}$ 高度下实验与仿真主动臂运动对比
Fig. 20 The experimental and simulated active arm movements comparison at a height of $Z=-500\text{ mm}$

以 $Z=-500\text{ mm}$, 半径 $r=376\text{ mm}$ 为例,图 20 展示了该条件下实验与仿真得到的主动臂角度对比。

图 20(a)~(c) 3 条主动臂的运动角度轨迹。如表 9 所示,所有 6 条实验曲线在运动过程中均未超过设定的主动臂关节角度限制。

图 20(d)~(f) 同一时刻下实验测量角度与仿真角度的误差曲线。误差均值约为 0.004° ,最大误差值约为 0.056° 。

表 9 和图 20 的实验验证结果表明,在密度场求解得到的最大内切工作曲线上执行圆周运动,所有主动臂关节角度均在允许范围内,验证了曲线作为工作空间边界的有效性。

实验测量角度与高精度仿真结果之间的偏差最大误差约 0.056° 。该偏差量级在伺服控制系统和传感器精度范围内,主要来源于实际系统的建模误差、控制误差和传感器噪声。此微小误差充分证明了基于密度场求解最大内切工作曲线的理论方法的正确性和工程实用性。

为验证前文提到的点集法求解曲线所保留的工程安全裕度的有效性,在已经过验证的实验平台上设计了一组安全裕度有效性检测实验,实验设计思路如图 21 所示。

图 21 安全裕度实验流程
Fig. 21 Flow chart of safety margin test

在同一高度 Z 下,设点集法求得的最大内切半径为 r_1 ,公式法求得的最大内切半径为 $r_2(r_1 < r_2)$ 。以切片形心为圆心,可将径向方向划分为 3 个区间:1) 内部区间: $r < r_1$; 2) 安全裕度区间: $r_1 \leq r < r_2$; 3) 外部区间: $r \geq r_2$ 。

分别在 3 个区间内任意选取一个半径值,连同点集法边界半径 r_1 与解析公式法边界半径 r_2 ,共得到 5 个不同径向位置的半径值,可分别代表 3 个区间内和两边界上的运动轨迹参数。将上述半径升维为同一高度 Z 下的空间圆弧轨迹,使机器人末端执行器分别沿这 5 条轨迹运动。

根据前文提到的运动约束条件(主动臂运动角度 $-30^\circ < \alpha < 90^\circ$),可通过监测各轨迹运动过程中主动臂角度是否越限,判别点集法边界曲线所留出的安全裕度的有效性。此实验中选用的 5 条曲线的参数如表 10 所示。

实验步骤与验证曲线正确性的流程相似,每条曲线的运动步数均设置为 500,将 5 条曲线的主动臂运动轨迹放在一起做直观对比,如图 22 所示。

表 10 安全裕度实验曲线参数表

Table 10 Parameters of safety margin test curve

位置	半径/mm
内部	414.000
边界 1	424.102
安全区间	430.000
边界 2	440.000
外部	450.000

表 11 安全裕度实验结果

Table 11 Safety margin test resultse

曲线半径/mm	最大运动角度/(°)	最小运动角度/(°)
414.000	84.072	-22.320
424.102	86.309	-21.991
430.000	87.630	-21.783
440.000	89.900	-21.401
450.000	92.212	-20.985

但仍在约束范围内,证实了其可达性;3)公式法边界轨迹的最大运动角度为 89.90°,几乎触及极限;4)外部区间轨迹的最大角度达到 92.21°,明显超出 90°的约束上限,导致运动过程中触发关节限位,证实了外部区域不可达。

上述实验结果直接证明点集法求解曲线相较于公式法曲线,在-500 mm 的径向方向上主动预留了约 15.898 mm 的安全裕度。安全裕度区间范围内,主动臂运动轨迹平稳且未超限,该裕度足以保证机器人在执行轨迹时主动臂角度远离极限位置,从而有效避免关节超限导致的失稳风险。

4 结 论

1) 针对 Delta 并联机器人最大内切曲线求解的问题,提出基于密度场理论的全新求解方法成功求解了 Delta 并联机器人的最大内切工作曲线。结合运动学约束与工作空间边界条件,将工作空间边界问题转化为密度梯度突变检测,规避了复杂空间曲面解析建模的困难。其方法独立于机构参数,可适配任意 Delta 构型,通过解析公式法与数值点集法双路径验证,验证了密度法的普适性。

2) 解析公式法基于运动学方程计算边界,精度高,迭代快,相较于数值点集法容积大 4.4%~8.86%,适用于结构参数优化设计。数值点集法以离散点生成密度场,通过核密度估计(KDE)转换为一维连续函数,利用函数极值点判别边界。其结果为工程应用提供天然缓冲空间,相较于解析公式法预留了 3.2%~5.4%安全裕度,适合作为实际运动控制的限位条件。

3) 代入约束条件后空间利用率仅约为 35%,进一步体现了结构参数改进的重要性,最大内切曲线求解为 Delta 机器人尺度综合提供了一个统一的评价参数。将期望工作空间这一主观性较强的概念,转换为了由机构自身性质决定的指标,对后续 Delta 并联机器人轨迹规划、运动控制以及尺度综合研究有一定参考价值。

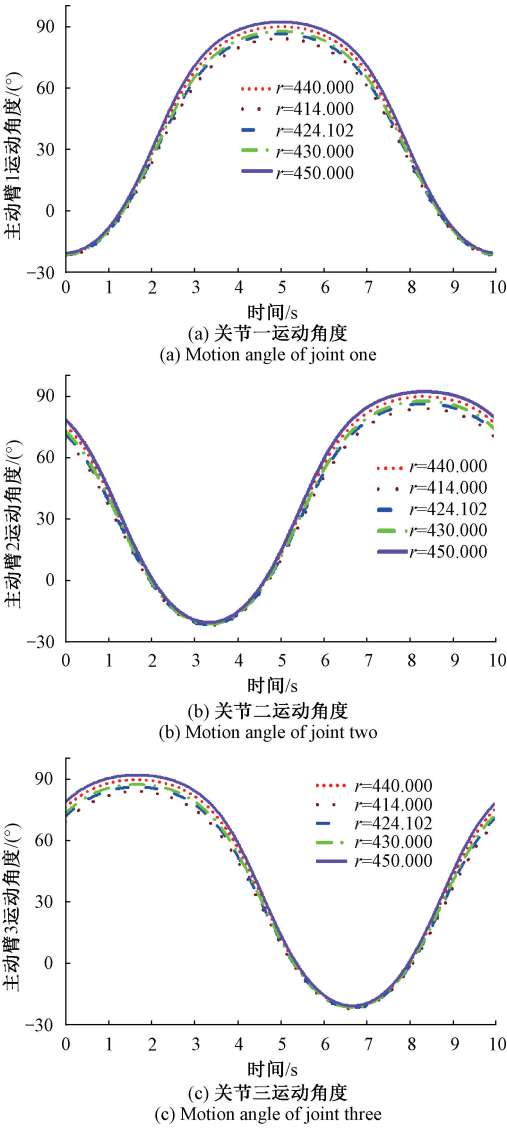


图 22 主动臂运动对比

Fig. 22 Comparison diagram of active arm movement

实验采集到 5 条运动曲线实验结果如表 11 所示。
结合图 22 与表 10 中的数据分析可得:1)内部区间与点集法边界的轨迹全程满足角度约束;2)安全裕度区间轨迹的最大角度为 87.63°,虽已接近 90°上限,

参考文献

- [1] 赵智远,徐振邦,何俊培,等. 基于工作空间分析的 9 自由度超冗余串联机械臂构型优化[J]. 机械工程学报, 2019, 55(21): 51-63.
ZHAO ZH Y, XU ZH B, HE J P, et al. Configuration optimization of nine degree of freedom super-redundant serial manipulator based on workspace analysis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(21): 51-63.
- [2] 张利敏,梅江平,赵学满,等. Delta 机械手动力尺度综合[J]. 机械工程学报, 2010, 46(3): 1-7.
ZHANG L M, MEI J P, ZHAO X M, et al. Delta mechanical manual force scale synthesis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(3): 1-7.
- [3] CLAVEL R. Device for the movement and positioning of an element in space: US19890403987 [P]. US4976582A. 1990-12-11.
- [4] 艾青林,祖顺江,胥芳. 并联机构运动学与奇异性研究进展[J]. 浙江大学学报(工学版), 2012, 46(8): 1345-1359.
AI Q L, ZU SH J, XU F. Research advances in the kinematics and strangeness of parallel mechanism [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2012, 46(8): 1345-1359.
- [5] 伞红军,杨晓园,陈久朋,等. Delta 并联机器人运动学性能分析与结构参数优化[J]. 农业机械学报, 2024, 55(8): 446-458.
SHAN H J, YANG X Y, CHEN J P, et al. Kinematic performance analysis and structural parameter optimization of delta parallel robot [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(8): 446-458.
- [6] 冯李航,张为公,龚宗洋,等. Delta 系列并联机器人研究进展与现状[J]. 机器人, 2014, 36(3): 375-384.
FENG L H, ZHANG W G, GONG Z Y, et al. Research progress and current situation of delta series parallel robots [J]. Robot, 2014, 36(3): 375-384.
- [7] LARIBI M A, ROMDHANE L, ZEGHLOUL S. Analysis and dimensional synthesis of the DELTA robot for a prescribed workspace [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(7): 859-870.
- [8] DASTJERDI A H, SHEIKHI M M, MASOULEH M T. A complete analytical solution for the dimensional synthesis of 3-DOF delta parallel robot for a prescribed workspace [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 153: 103991.
- [9] 梁香宁,牛志刚. 三自由度 Delta 并联机器人运动学分析及工作空间求解[J]. 太原理工大学学报, 2008(1): 93-96.
LIANG X N, NIU ZH G. Kinematic analysis and working space solution of three-degree of freedom Delta parallel robot [J]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2008(1): 93-96.
- [10] 高英儒. 三自由度并联机器人工作空间研究[D]. 天津:天津理工大学, 2010.
GAO Y R. Research on working space of three-degree of freedom parallel robot [D]. Tianjin: Tianjin University of Technology, 2010.
- [11] 黄海忠. DELTA 并联机器人结构参数优化与运动控制研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2013.
HUANG H ZH. Research on structural parameter optimization and motion control of DELTA parallel robot [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013.
- [12] 梁艳阳,王效杰,刘恒. Delta 机器人结构参数与期望工作空间之间关系研究[J]. 机械设计与制造, 2015(2): 154-156, 160.
LIANG Y Y, WANG X J, LIU H. Research on the relationship between Delta robot structural parameters and expected working space [J]. Machinery Design & Manufacture, 2015(2): 154-156, 160.
- [13] HONG J H, LIM J H, LEE E, et al. The workspace analysis of the delta robot using a cross-section diagram based on zero platform [J]. Machines, 2024, 12(8): 583.
- [14] ANVARI Z, ATAIEI P, MASOULEH M. Collision-free workspace and kinetostatic performances of a 4-DOF Delta parallel robot [J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2019, 41(2): 99.
- [15] 刘辛军,汪劲松,米浦波,等. DELTA 并联机器人最大内切工作空间的几何求解[C]. 2001 年中国智能自动化会议论文集(上册), 2001: 630-635.
LIU X J, WANG J S, MI P B, et al. Geometric solution of the maximum inscribed working space of DELTA parallel robot [C]. Proceedings of 2001 Chinese Conference on Intelligent Automation (Volume 1), 2001: 630-635.
- [16] 姜轶辉. 三自由度 Delta 并联机器人工作空间研究[D]. 西安:长安大学, 2018.

- JIANG Y H. Research on workspace of three-degree of freedom Delta parallel robot [D]. Xi'an: Chang'an University, 2018.
- [17] YANG ZH Y, TIAN W, WANG H Y, et al. Snake-like robot workspace solving method based on improved monte carlo method [J]. Applied Bionics and Biomechanics, 2025, 2025(1):6125695.
- [18] 刘春玲,刘佳昕,郭楷文. 基于通道动态窗口法的避障方法[J]. 计算机应用研究, 2025, 42(2):501-506.
- LIU CH L, LIU J X, GUO K W. Obstacle avoidance method based on channel dynamic window method[J]. Application Research of Computers, 2025, 42(2): 501-506.
- [19] 张海山,张正军,宋宗莹,等. 融合聚类算法的钢轨轮廓点云自适应精简[J]. 测绘通报, 2023(10): 135-139.
- ZHANG H SH, ZHANG ZH J, SONG Z Y, et al. Self-adaption simplification of rail contour point cloud by fusion clustering algorithm[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2023(10): 135-139.
- [20] ZHU Y H, LI J R, XU Y N. Improvement of 3D green volume estimation method for individual street trees based on TLS data[J]. Forests, 2025, 16(4):690.
- [21] 刘润浩. 针对零件三维点云几何特征尺寸提取算法研究[D]. 包头:内蒙古科技大学, 2023.
- LIU R H. Research on extraction algorithm of geometric feature size of 3D point cloud of parts[D]. Baotou: Inner Mongolia University of Science & Technology, 2023.
- [22] DEY E K. Roof boundary points extraction from LiDAR point cloud data using adaptive neighbourhood-based α -shape algorithm[J]. IEEE Access, 2025, 13: 163896-163906.
- [23] 吴风扬,黄文倩,田喜,等. 基于机器视觉的无序堆放西瓜识别与定位技术[J]. 新疆农业科学, 2024, 61(7):1805-1813.
- WU F Y, HUANG W Q, TIAN X, et al. Recognition and positioning technology for unordered stacking of watermelons based on machine vision [J]. Xinjiang Agricultural Sciences, 2024, 61(7): 1805-1813.
- [24] WANG X, CUI M, LI W, et al. Topology optimization of structures with steady-state heat conduction using an improved parameterized level set method[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2026, 33(1): 2459358.
- [25] SILVERMAN B W. Choosing the window width when estimating a density[J]. Biometrika, 1978, 65(1): 1-11.
- [26] 赵杰,朱延河,蔡鹤皋. Delta 型并联机器人运动学正解几何解法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2003(1):25-27.
- ZHAO J, ZHU Y H, CAI H G. Delta parallel robot positive kinematical geometry solution [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2003(1): 25-27.
- [27] 梁香宁. Delta 机器人运动学建模及仿真[D]. 太原:太原理工大学, 2008.
- LIANG X N. Kinematical modeling and simulation of Delta robot [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2008.
- [28] 刘嘉琦. Delta 并联机器人工作空间分析及参数优化[D]. 昆明:昆明理工大学, 2023.
- LIU J Q. Working space analysis and parameter optimization of Delta parallel robot [D]. Kunming: Kunming University of Science and Technology, 2023.
- [29] 商德勇,潘斌,索双富,等. 基于旋量理论的 Delta 并联机器人误差分析[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2025, 65(7):1336-1346.
- SHANG D Y, PAN CH, SUO SH F, et al. Delta parallel robot error analysis based on spin theory[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2025, 65(7): 1336-1346.
- [30] FATEH A, MOMENI H. Model-free adaptive task-space sliding mode control of a Delta robot using a novel reaching law[J]. ISA Transactions, 2024, 149: 69-80.
- [31] 乔贵方,蒋欣怡,高春晖,等. 基于多目标优化的工业机器人位置与姿态精度提升方法[J]. 仪器仪表学报, 2023, 44(12): 217-224.
- QIAO G F, JIANG X Y, GAO CH H, et al. A method for improving position and attitude accuracy of industrial robot based on multi-objective optimization[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2023, 44(12): 217-224.
- [32] 杨智勇,徐博,熊宇宏,等. 基于七次 B 样条曲线的输电线巡检机器人无碰抓线轨迹规划[J]. 电子测量技术, 2025, 48(18):73-81.
- YANG ZH Y, XU B, XIONG Y H, et al. Tracking planning of non-collision line for transmission line patrol robot based on 7th B-spline curve [J]. Electronic

Measurement Technology, 2025, 48(18): 73-81.

[33] 姚明辉,李梦涵,牛燕,等. 一种融合算法的多机器人路径规划[J]. 电子测量与仪器学报,2025,39(9):55-64.

YAO M H, LI M H, NIU Y, et al. Multi-robot path planning with fusion algorithm[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2025, 39(9): 55-64.

[34] ABRO G E M, MAHMOUD E. A hybrid pso-aco algorithm for precise localization and geometric error reduction in industrial robots [J]. Instrumentation, 2025, 12(1): 70-76.

[35] ZÁMEČNÍK S, HOROVÁ I, KATINA S, et al. An adaptive method for bandwidth selection in circular kernel density estimation [J]. Computational Statistics, 2024, 39(4): 1709-1728.

[36] LI CH, HUA X H, WANG W B, et al. A skewness-based density metric and deep learning framework for point cloud analysis: Detection of non-uniform regions and boundary extraction[J]. Symmetry, 2025, 17(10): 1770.

作者简介



黄飞翔,2020 年于重庆理工大学获得学士学位,现为重庆理工大学硕士研究生,主要研究方向为工业机器人与智能制造。

E-mail:huangfx@stu.cqut.edu.cn.

Huang Feixiang received his B. Sc. degree from Chongqing University of Technology in 2020. He is currently a master’s student at Chongqing University of Technology. His main research interests include dustrial robot and intelligent manufacturing.



鄢然(通信作者),2010 年于华中科技大学获得学士学位,2016 年于华中科技大学获得博士学位。现为重庆理工大学副教授,主要研究方向为深度学习与计算机视觉、智能制造与工业机器人等。

E-mail:yanran@cqut.edu.cn

Yan Ran (Corresponding author) received his B. Sc. degree from Huazhong University of Science and Technology in 2010, and his Ph. D. degree from Huazhong University of Science and Technology in 2016. He is currently an associate professor at Chongqing University of Technology. His main research interests include deep learning and computer vision, intelligent manufacturing and industrial robots.